Deutscher
Volkshochschul-Verband

Unterrichtskonzepte

Rechnen
Stufe 1

Einfach gut unterrichten.
Die DVV-Rahmencurricula

vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

Unterrichtskonzepte

Rechnen Stufe 1

**Einfach gut unterrichten.
Die DVV-Rahmencurricula**

Inhalt

Vorwort

Mathematisches Wissen baut sich Schritt für Schritt auf. Das Fundament sind (Er)kenntnisse, die selbstverständlich erscheinen: Rechnen ist etwas anderes als Abzählen. Gleiche Mengen können unterschiedlich dargestellt werden. Mengen oder Zahlen können in andere Mengen oder Zahlen zerlegt werden.

Auch Erwachsene können diese für das Rechnenlernen grundlegenden Kenntnisse erwerben. Entscheidend dafür ist, dass sie die Schritte dahin verstehen.

Für den Unterricht mit Erwachsenen, die nicht oder nur schlecht rechnen können, haben Wissenschaftler*innen unter Federführung von Wolfram Meyerhöfer das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* entwickelt. Es erklärt Lehrkräften, welche Verständnisprobleme dem Scheitern an vermeintlich einfachen Aufgaben häufig zugrundeliegen, beschreibt Lernziele und gibt Empfehlungen für erwachsenengerechtes Unterrichten.

Auf der ersten von drei Kompetenzstufen im DVV-Rahmencurriculum Rechnen geht es zunächst um den Übergang vom Zählen zum Rechnen. Wie Lehrkräfte Erwachsenen, die das Rechnen noch einmal von Grund auf erlernen wollen, diesen Übergang ermöglichen und im nächsten Schritt ein Verständnis für die Operationen Addition und Subtraktion vermitteln können, zeigen die Unterrichtskonzepte in diesem Band.

Ein *Wegweiser* hilft den Lehrkräften, den individuellen Rechenproblemen ihrer Teilnehmer*innen entsprechend die passenden Unterrichtskonzepte und Aufgaben auszuwählen. Alle Unterrichtskonzepte sind gleich aufgebaut: In einer Einführung werden Lernziele, typische Verständnisschwierigkeiten und Voraussetzungen für den Einstieg ins Thema beschrieben, die erforderlichen Lernmaterialien aufgeführt und Literaturhinweise gegeben. Es folgen kleinschrittige Unterrichtssequenzen mit Tipps für korrekte und gut verständliche Formulierungen, Hinweise zu Methoden, Verweise auf Aufgabenblätter und QR-Codes zu Online-Übungen im vhs-Lernportal.

Die Aufgabenblätter für die Lernenden stehen in einem eigenen Band zur Verfügung.

Wie die Unterrichtskonzepte und Aufgabenblätter zur Vermittlung elementarer Rechenkenntnisse genutzt werden können, erfahren Lehrkräfte auch in der Online-Schulung zum *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* (www.vhs-onlineschulung.de).

Symbole

St1 Stufe 1

Einzelarbeit

Partnerarbeit/Tandem

Gruppenarbeit

Diskussion

Vortrag

QR-Code: weiterführende Aufgaben zum online weiterüben

Wegweiser

Beobachtung	
Zahlverständnis und Rechenstrategien für Plus und Minus im Zahlraum bis 20	
Zahlen als Mengen verstehen (Der kardinale Zahlaspekt)	
TN kennt nicht unterschiedliche Verwendungsmöglichkeiten von Zahlen im Alltag (z. B. Anzahl, Position).	
TN unterscheidet nicht sicher zwischen Anzahl und Position (z. B. „fünf Würfel“ und „der fünfte Würfel“).	
TN kennt keine Kriterien zum Bilden von Gruppen, die sinnvoll zusammengefasst werden können.	
Mengen abzählen (Anzahlerfassendes Zählen)	
TN macht anhaltend Fehler beim Abzählen von Mengen.	
TN sagt die Zahlwortreihe (vorwärts bis ca. 20) fehlerhaft auf, z. B. mit Auslassungen.	
TN ordnet beim Abzählen nicht jedem Element genau ein Zahlwort zu (oder umgekehrt).	
TN weiß nicht sicher, dass bei geänderter Anordnung von Elementen deren Anzahl konstant bleibt.	
Menge – Zahlwort – Ziffer zuordnen (Zahldarstellungen)	
TN ordnet Mengenbilder, Ziffern und Zahlwörter einander nicht richtig zu.	
TN macht Fehler beim Schreiben von Ziffern (Spiegeln, Verwechseln …).	
Mengen und Zahlen vergleichen (Der relationale Zahlaspekt)	
TN macht Fehler in der Verwendung der Vergleichszeichen (>, <, =).	
TN vergleicht Mengen nicht mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung, sondern zählt immer ab.	
TN kennt Begriffe wie „mehr/weniger/gleich“ nicht oder versteht diese anders als erwünscht.	
TN beantwortet Fragen „Um wie viel ist … mehr als …?“ falsch oder versteht diese Fragestellung gar nicht.	
TN macht Fehler beim Ermitteln von Unterschieden von Mengen oder Zahlen.	
TN beantwortet Fragen „Was ist um 1 mehr/weniger als …“, „Was ist um 2 mehr/weniger als …“ falsch.	
TN kann Zusammenhänge zwischen Zahlen nicht korrekt beschreiben (z. B. „… ist um x mehr/weniger als …“).	
TN kann den Unterschied zweier Zahlen nicht durch Hinzufügen oder Wegnehmen ausgleichen.	
Mengen und Zahlen zerlegen (Teile-Ganzes-Verständnis)	
TN kennt keine anderen, unterschiedlichen Bezeichnungen für „Gesamtes“ und „Teile“.	
TN erkennt nicht, dass eine Summe gleich bleibt, wenn ihre Summanden gegensinnig verändert werden.	
TN kann Gesetzmäßigkeiten beim Verändern von Teilmengen nicht beschreiben.	
TN findet für eine Zahl keine oder nur wenige Zerlegungsmöglichkeiten.	
TN erkennt keine Zusammenhänge zwischen einzelnen Zahlzerlegungen.	

Alle Materialien finden Sie unter www.materialsuche.grundbildung.de

Hier geht's zu www.vhs-lernportal.de

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte

RC Rechnen Praxismaterial	vhs-Lernportal
Stufe 1	
AB 2.1 a Funktionen von Zahlen und Zahlnutzung	2.1 Zahlnutzungen
	2.2 Anzahl und Ordnungszahl
AB 2.2 a, 2.2 b, 2.2 c Oberbegriffe	2.2 Was kann man sinnvoll zusammenzählen?
	2.3 Zählfehler und Zählstrategien 4.3 Plus1-Trainer
	2.4 Zahldarstellung
AB 4.1 a Vergleichszeichen	4.1 Was ist Vergleichen?
AB 4.2 a Anzahlvergleiche AB 4.2 b Sind es gleich viele?	
AB 4.3 a … mehr/weniger als	4.2 Der Unterschied
	4.3 Seriation von Zahlen; Plus1-Trainer; Minus1-Trainer
AB 4.4 a Wie viele sind es mehr oder weniger?	
AB 4.4 b Unterschied von Zahlen	4.4 Zahlreihen
AB 5.1 a Begriffe „Gesamtes“ und „Teile“ AB 5.2 a Zahlzerlegungen, Anzahl und Einer	5.1 Gesamtes und Teile; Zahlzerlegungen 5.1 Gegensinniges Verändern
AB 5.2 b Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlenzerlegung AB 5.2 c Zahlzerlegungen	5.2 Zerlegungen in zwei oder mehrere Teilmengen; Darstellungsformen für Zahlzerlegungen
	5.3 Zahlzerlegungen und ihr Bezug zu Addition und Subtraktion 6.1 Bezüge zur Fünf 6.2 Bezüge zur Zehn

Beobachtung	
TN versteht den Zusammenhang von Zerlegen/Plus/Minus/Ergänzen nicht.	
TN hat die Zerlegungen aller Zahlen bis 10 nicht vollständig automatisiert.	
Plus und Minus verstehen (Operationsverständnis Addition und Subtraktion)	
TN kennt die Begriffe Summand und Summe nicht oder ordnet diese in einer Gleichung falsch zu.	
TN kennt die Begriffe Subtrahend, Minuend und Differenz nicht oder ordnet diese in einer Gleichung falsch zu.	
TN erstellt zu Mengenhandlungen (Plus/Minus) keine passenden Skizzen.	
TN schreibt Mengenhandlungen (Plus/Minus) nicht richtig als Gleichung auf.	
TN kann Additions- und Subtraktionsgleichungen nicht richtig mit Material darstellen.	
TN kann zu Additions- und Subtraktionsgleichungen keine Sachsituationen aus dem Alltag nennen.	
TN kann zu Sachsituationen aus dem Alltag (Plus/Minus) keine passenden Gleichungen aufschreiben.	
Nicht-zählende Rechenstrategien und Automatisierung (Plus und Minus im Zahlraum bis 20)	
TN kann Zahlen von 11 bis 20 nicht richtig lesen, aufschreiben oder in Zehner und Einer zerlegen.	
TN ist beim Rechnen überwiegend oder sogar völlig auf zählendes Rechnen, z. B. mit Fingern, angewiesen.	
TN macht gehäuft Fehler beim Plus- und Minusrechnen (z. B. „Fehler um eins“).	
TN nutzt automatisierte Plus-/Minusaufgaben nicht für Analogien (z. B. 5 + 3 für 15 + 3).	
TN nutzt automatisierte Plusaufgaben nicht für Nachbaraufgaben (z. B. 3 + 3 für 3 + 4).	
TN nutzt automatisierte Plusaufgaben nicht für Umkehrbaraufgaben (z. B. 7 + 7 für 14 – 7).	
TN nutzt das gegensinnige Verändern nicht als Lösungsstrategie (z. B. 3 + 3 für 2 + 4).	
TN hat Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 20 nicht vollständig automatisiert.	
Dezimales Stellenwertsystem – Zweistellige Zahlen verstehen	
Zehner und Einer verstehen (Bündelungsgedanke und Stellenwertschreibweise)	
TN sieht Zehn nicht als neue Größe „aus 10 Einern zusammengebaut“, sondern eher als eine Position („nach 9“).	
TN erkennt nicht die Vorteilhaftigkeit des Bündelns beim Abzählen großer Mengen oder macht dabei Fehler.	
TN macht Fehler beim Zerlegen zweistelliger Zahlen in ihre Stellenwerte (z. B. 64 = 6Z 4E).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen zweistelliger Zahlen aus ihren Stellenwerten (z. B. 5E 2Z = 25).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen zweistelliger Zahlen, wenn gebündelt werden muss (z. B. 2Z 14E = 34).	
Zweistellige Zahlen lesen und schreiben	
TN macht Fehler beim Schreiben zweistelliger Zahlen nach Diktat (v. a. Zahlendreher).	
TN macht Fehler beim Lesen zweistelliger Zahlen (v. a. Zahlendreher).	
TN schreibt die Zahl invers, also Einerziffer zeitlich vor der Zehnerziffer (evtl. wie in der Muttersprache).	
TN ist mit Besonderheiten der deutschen Zahlwortbildung nicht vertraut und daher unsicher (z. B. bei elf, zwölf, zwanzig, etc.).	

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte	
RC Rechnen Praxismaterial	**vhs-Lernportal**
	6.3 Zahlzerlegungen und zugehörige Additions- und Subtraktionsaufgaben
	1±1-Trainer zur Zahlzerlegung
	3.1 Was ist Addieren
	3.2 Was ist Subtrahieren
AB 7.1 a Sachsituationen Darstellung: bildlich und symbolisch AB 7.1 b Gleichungen und Rechengeschichten Bilder beschreiben	3.1 Additionen in Gleichungen 3.2 Subtraktionen in Gleichungen 3.3 Addition und Subtraktion als Umkehroperation
AB 7.1 c Gleichungen zu Sachsituationen AB 7.1 d Situationen Gleichungen mit mehr als zwei Teilmengen	3.4 Anwendungen in Sachsituationen
	8.1 Aufbau der Zahlen bis 20
	8.2 Zahlbeziehungen und Analogien zum Rechnen nutzen
	8.3 Rechenstrategien und Lösungswege: Addition, Subtraktion und Zehnerübergang: Verdoppeln +/–1; gegensinniges Verändern
	1±1-Trainer: Additionen und Subtraktionen bis 20
Stufe 2: Kapitel 9	
AB 9.1 a Bündeln in Zehner AB 9.1 b Bündeln in Zehner und in Fünfer	9.1 Strukturen, Bündel, Muster, Einheiten
	9.2 Zehnerbündel im Stellenwertsystem
AB 9.2 a Stellenwerte AB 9.2 b Stellenwerttabelle	
AB 9.3 a Zahlenschreibweise Zahlendiktate (Zahlen ansagen und in den Taschenrechner eintippen lassen)	9.3 Zahlen hören und schreiben
	10.1 Bündelung, Entbündelung und Stellenwert-Umwandlungen

Beobachtung	
Orientierung im Zahlraum bis 100	
TN kennt verschiedene Darstellungsformen für zweistellige Zahlen nicht, z. B. Systemmaterial (Zehnerstangen, Einerwürfel) und Zahlenstrahl.	
TN stellt zweistellige Zahlen nicht richtig dar, z. B. mit Systemmaterial oder am Zahlenstrahl.	
TN benennt mit Material dargestellte zweistellige Zahlen falsch oder schreibt sie falsch.	
Vorteilhafte Rechenstrategien anwenden (Plus und Minus im Zahlraum bis 100)	
TN ist beim Plus- und Minusrechnen mit zweistelligen Zahlen auf Hilfsmittel (z. B. zählendes Rechnen, schriftliches Rechnen, Taschenrechner, …) angewiesen.	
TN kennt und nutzt keine nicht-zählenden Lösungsstrategien für Additionen und Subtraktionen im Zahlraum bis 100 (z. B. Analogien, Zehnervorteil, Zehnerstopp, gegensinniges Verändern, Verdoppeln +/–1, etc.).	
Dezimales Stellenwertsystem – Zahlen bis 1000 und große Zahlen verstehen	
Mehrstellige Zahlen verstehen (Bündelungsprinzip und Stellenwertprinzip erweitern)	
TN sieht Hunderter nicht als neue Größe („aus 10 Zehnern zusammengebaut“) an.	
TN versteht die fortgesetzte Zehnerbündelung nicht als Grundprinzip des dezimalen Stellenwertsystems und kann den Bündelungsgedanken nicht auf größere Stellenwerte übertragen (1 Z = 10 E, 1 H = 10 Z, 1 T = 10 H, etc.).	
TN stellt mehrstellige Zahlen nicht richtig dar, z. B. mit Systemmaterial, in der Stellenwerttafel oder am Zahlenstrahl.	
TN benennt dargestellte mehrstellige Zahlen falsch oder schreibt sie falsch auf.	
TN macht Fehler beim Zerlegen dreistelliger Zahlen in ihre Stellenwerte (z. B. 364 = 3 H 6 Z 4 E).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen dreistelliger Zahlen aus ihren Stellenwerten (z. B. 8 H 5 E 2 Z = 825).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen dreistelliger Zahlen, wenn gebündelt werden muss (z. B. 2 H 14 Z = 340).	
TN macht Fehler im Umgang mit der Null als Platzhalter (z. B. 3 H 7 E = 307).	
TN macht Fehler beim Lesen und Schreiben dreistelliger Zahlen.	
Orientierung im Zahlraum bis 1000	
TN nennt falsche Nachbarzahlen.	
TN macht Fehler beim Runden zwei- oder dreistelliger Zahlen.	
TN versteht nicht, wofür das Runden im Alltag gut ist, und wendet es nicht für Überschlagsaufgaben an.	
Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 1000 ohne schriftliche Normalverfahren	
TN kennt und/oder nutzt keine vorteilhaften Lösungswege (z. B. gegensinniges Verändern bei Addition, gleichsinniges Verändern bei Subtraktion, stellenweises Rechnen, schrittweises Rechnen).	
TN nutzt keine Hilfsmittel zur Lösungsfindung bzw. zur Darstellung der eigenen Lösungswege (z. B. Rechenstrich, halbschriftliches Rechnen mit Notieren der Zwischenschritte).	
Dezimalsystem auf beliebig große Zahlen erweitern	
TN kann die einzelnen Stellen bis mindestens Million nicht richtig benennen.	
TN kann große Zahlen nicht richtig lesen und schreiben.	
TN kann große Zahlen nicht richtig addieren oder subtrahieren.	

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte	
RC Rechnen Praxismaterial	**vhs-Lernportal**
AB 9.4 a Darstellung von Zahlen	9.4 Zahlen visualisieren
	10.1 Bündelung, Entbündelung und Stellenwert-Umwandlungen
	10.2 Addition und Subtraktion: Vorteilhaftes Rechnen
Stufe 2: Kapitel 11	
AB 11.1 a Das Dezimalsystem: Bündelung großer Mengen AB 11.2 a Stellenwerte umwandeln, Zahlwörter schreiben	11.1 Bündelungen und Aufbau der Zahlen bis 1000 11.2 Konstruktion des Dezimalsystems 11.3 Stellenwertumwandlungen, Zahlzerlegung von dreistelligen Zahlen 11.4 Zahlen sprechen, hören, schreiben
AB 11.1 b Zahlen ordnen und Nachbarn finden	
AB 11.5 a Runden, schätzen und überschlagen	11.5 Runden, schätzen und überschlagen
	11.6 Addition und Subtraktion ohne Zehner-/Hunderterübergang
	11.7 Addition und Subtraktion mit Zehner-/Hunderterübergang
	12.1 Erweiterung des Dezimalsystems
	12.2 Zahlen hören, sprechen und schreiben
	12.3 Addition und Subtraktion

Beobachtung	
Multiplikation	
Malnehmen verstehen (Operationsverständnis Multiplikation)	
TN kennt die Begriffe Faktor und Produkt nicht oder ordnet diese in einer Gleichung falsch zu.	
TN stellt gegebene Multiplikationsgleichungen nicht passend dar (Materialhandlung oder Skizze).	
TN schreibt dargestellte Multiplikationsaufgaben nicht richtig als Rechnung auf.	
TN findet zu Malaufgaben keine alltagsrelevanten Sachsituationen.	
TN nennt zu alltagsrelevanten Sachsituationen nicht die passenden Multiplikationsaufgaben.	
Einmaleins-Aufgaben vernetzen und merken (Automatisierung des Einmaleins)	
TN hat die Kernaufgaben Zweimal, Fünfmal und Zehnmal nicht automatisiert.	
TN kann Zusammenhänge zwischen einzelnen Malaufgaben nicht beschreiben (z. B. $6 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 8$).	
TN nutzt keine oder falsche Ableitungswege zum Ermitteln von Einmaleins-Aufgaben.	
TN hat das kleine Einmaleins nicht ausreichend automatisiert.	
TN kann zweistellige Zahlen nicht im Kopf verzehnfachen oder verhundertfachen.	
TN nutzt für das Große Einmaleins keine Ableitungsstrategien (z. B. $14 \cdot 8 = 10 \cdot 8 + 4 \cdot 8$).	
Anteile, Brüche und Prozentsätze	
Anteile	
TN kann Anteile nicht auf verschiedene Arten benennen oder darstellen.	
TN kann Anteile unterschiedlicher Gesamtheiten nicht miteinander vergleichen.	
Zusammenhang Prozent – Bruch – Dezimal	
TN kann Darstellungen von Anteilen nicht auf unterschiedliche Art (Bruch, Dezimalzahl und Prozent) benennen.	
Prozentrechnung am Prozentstreifen und mittels Dreisatz	
TN kennt die Begriffe der Prozentrechnung nicht oder wendet sie nicht richtig an.	
TN schätzt an Beispielen Prozentsätze und Prozentwerte nicht sinnvoll ab.	
TN kann Prozentsätze und Prozentwerte eines Ganzen nicht am Prozentstreifen darstellen.	
TN kann den Dreisatz als Methode zur Prozentrechnung nicht nutzen.	
TN kann komplexe Beispiele zu vermindertem und vermehrtem Grundwert nicht berechnen.	

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte

RC Rechnen Praxismaterial	vhs-Lernportal
Stufe 2: Kapitel 13	
AB 13.1 a Multiplikationsaufgaben zuordnen AB 13.1 b Rechenskizze: Orangen AB 13.1 c Rechenskizze: Neuwagen und Stifte AB 13.1 d Teilmengen: Friedas Kekse AB 13.1 e Teilmengen: Badezimmerfliesen und Kinobesuch AB 13.1 f Operationslogik: Lippenstifte AB 13.1 g Operationslogik: Eiaufstrich	13.1 Operationslogik der Multiplikation
AB 13.2 a Zweimal-Aufgaben AB 13.2 b, 13.2 c Fünfmal-Aufgaben	
	13.2 Das kleine Einmaleins
Karteikarten zum individuellen Üben	Einmaleins-Trainer komplett
	13.3 Verzehnfachen und Verhundertfachen
	13.4 Multiplikation größerer Zahlen
Stufe 3: Kapitel 17	
17.1 Kopiervorlage 1	
17.4 Kopiervorlage 1 und 2	
AB 17.5 a Abschätzen und Uploadstreifen	
AB 17.5 b Prozentrechnung am Prozentstreifen	
AB 17.5 c Prozentrechnung mithilfe des Dreisatzes	
AB 17.5 d Prozentrechnung mit vermindertem und vermehrtem Grundwert	

vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

Einfach gut unterrichten:
Die Online-Schulung zum DVV-Rahmencurriculum

Rechnen

Für Lehrkräfte in der Grundbildung – jederzeit und kostenfrei!

vhs-onlineschulung.de

AlphaDekade 2016 – 2026

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

KARDINALE UND ANDERE NUTZUNGEN VON ZAHLEN

2

2 KARDINALE UND ANDERE NUTZUNGEN VON ZAHLEN

Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- die wesentlichen Zahlaspekte (Kardinalzahl, Ordnungszahlzahl, Maßzahl, Rechenzahl und Codierung) kennen und unterscheiden
- Ordnungszahl „Platz in einer Reihenfolge" und Kardinalzahl „Anzahl von etwas" sicher unterscheiden
- Schreib- und Sprechweise von Ordnungszahlen kennen und richtig benutzen
- Schreib- und Sprechweisen sowie Darstellungsformen von Kardinalzahlen kennen und richtig benutzen
- beim Abzählen unübersichtlicher Mengen günstige Zählstrategien anwenden
- beim Abzählen unübersichtlicher Mengen die Zählprinzipien (Eins-zu-eins-Zuordnung, Konstanz der Menge, Zahlwortreihe...) einhalten
- Kriterien für Abzählbarkeit kennen und beschreiben, ob ein Zusammenfassen verschiedener Elemente sinnvoll ist und für zusammenfassbare Gruppen Oberbegriffe nennen

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Einsicht in die Invarianz von Mengen (Eine Menge bleibt gleich groß, wenn kein Element entnommen oder hinzugefügt wird.)
- Ziffern schreiben
- Zahlwortreihe vorwärts bis mindestens 10

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Ein fehlendes oder nur rudimentär vorhandenes kardinales Zahlverständnis ist häufig ein fundamentales Wissensdefizit von *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* und oftmals ein großes Hindernis beim Erlernen mathematischer Grundlagen. Den Teilnehmer*innen dieses Kurses soll in den folgenden Stunden deutlich werden, dass Zahlen die Anzahl von etwas angeben können und in diesem Sinne die Antwort auf die Frage „Wie viele?" sind (kardinaler Zahlbegriff). Im Kontrast dazu ist bei einem Großteil der *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* ein überwiegend ordinal geprägtes Zahlverständnis ausgeprägt. Trifft ein solches dominantes ordinales Zahlverständnis mit einem nicht oder nur rudimentär vorhandenen kardinalen Zahlbegriff zusammen, dann wird Rechnen vor allem als Vor- und Zurückschreiten an einer Zahlenreihe verstanden. Mit diesem Vorgehen ist kein verständiges Operieren mit Zahlen und Mengen möglich. Unter Umständen müssen ähnliche Aufgaben immer wieder neu ausgezählt werden. Nur wenn verstanden wurde, wie Mengen und somit auch Zahlen zueinander in Beziehung stehen, kann beispielsweise der Zusammenhang zwischen folgenden Gleichungen erkannt werden:

$9 + 3 = 12$		$3 + 9 = 12$
$12 - 3 = 9$	und	$12 - 9 = 3$

Nach der Lösung von 9 + 3 müssen die Aufgaben 3 + 9; 12 – 3 und 12 – 9 nicht erneut berechnet werden[1].

Um das kardinale Zahlverständnis zu fördern, werden die Teilnehmer*innen erfahren, dass die Anzahl immer die Gesamtmenge an Zählobjekten bezeichnet (kardinaler Zahlbegriff) und nicht nur das zuletzt gezählte Objekt (ordinaler Zahlbegriff). Werden beispielsweise neun Bücher abgezählt, meint die Neun in diesem Fall alle Bücher und nicht nur das neunte Buch.

Wenn deutlich geworden ist, dass mit Mengen und Zahlen auf die Eigenschaft „Anzahlhaftigkeit" fokussiert wird, dann folgt daraus, dass die Reihenfolge der Objekte bei der Ermittlung der Anzahl unwesentlich ist. Entscheidend ist nur die Anzahl der Objekte. Jedes einzelne Objekt entspricht der Anzahl eins. Das Zusammenfassen der Einer/Einser führt zu einer Gesamtmenge, der gesamten Anzahl an Objekten.

Im Unterrichtskonzept 2.1 wird die Vielzahl der Verwendungen von Zahlen, d. h. die verschiedenen Zahlnutzungen, thematisiert. Die Stundenkonzepte zum DVV-Rahmencurriculum verfolgen nicht nur das Ziel, die Teilnehmer*innen zu sicheren Rechner*innen zu machen, sondern auch den Blick auf Zahlen und die Mathematik zu komplettieren. Zahlen sind eben nicht ausschließlich zum Rechnen da. Sie erfüllen eine Vielzahl weiterer Funktionen. Zahlen werden auch zum Codieren, Messen, Operieren und zur Angabe eines Rangplatzes genutzt. Mit der Verwendung des **Aufgabenblattes 2.1 a** hat die Kursleitung die Möglichkeit zu überprüfen, ob alle Teilnehmer*innen die Beispiele zur Zahlnutzung selbstständig den Kategorien zuordnen können.

Im letzten Teil des 2. Kapitels wird der Blick auf Zahlen und Mengen noch weiter geschärft. Es werden mathematische Erfahrungen und mögliche Schwierigkeiten im Anfangsunterricht anhand von Zählfehlern reflektiert (2.3). Abschließend wird der Gehalt von Zahlen mit verschiedenen Übungen zur Darstellung bzw. Weitergabe von Zahlen greifbarer gemacht (2.4). Beide Unterkapitel dienen der Reflektion der eigenen Lernhistorie und der Auseinandersetzung mit Zahlen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Zahlen dienen nicht nur der Betrachtung von Mengenänderungen durch Wegnahme (Subtraktion), Hinzufügen (Addition), Verteilen/Einteilen (Division) oder Vervielfachen (Multiplikation), sondern erfüllen über die Rechenoperationen hinaus eine Vielzahl weiterer Funktionen. Ist dies nicht verstanden, könnte jede Textaufgabe als Auftrag zum Operieren mit allen im Text befindlichen Zahlen verstanden werden. Durch die Weitung des Blickes auf Zahlen und deren Nutzungsmöglichkeiten sind die Teilnehmer*innen dazu angehalten, den Kontext und den Zweck der Zahlnutzung zu prüfen, bevor eine Aufgabe gelöst wird. Die Erprobung der vorliegenden Unterrichtskonzepte hat gezeigt, dass die Beschäftigung mit den unterschiedlichen Nutzungskontexten von Zahlen – ohne dass die Teilnehmer*innen *sofort losrechnen* – zu deutlich besseren Ergebnissen bei der Bearbeitung von Sach- und Textaufgaben führt.

Bezüglich des kardinalen Zahlbegriffs könnten die Teilnehmer*innen missverstehen, dass beim Abzählen einer Menge die Zahl nur den zuletzt gezählten Gegenstand bezeichnet (ordinaler Zahlbegriff[2]). Es liegen beispielsweise sechs Stifte auf dem Tisch und auf die Frage, wo denn nun die (An-) Zahl Sechs zu finden sei, zeigt die*der Teilnehmer*in auf den zuletzt gezählten Stift, anstatt auf alle sechs Stifte zu verweisen. Diese Logik führt – konsequent weiter gedacht – dazu, dass das Operieren mit Zahlen lediglich als Auftrag verstanden wird, die Zahlreihe vor- oder rückwärts abzuschreiten. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Teilnehmer*innen mathematischer Grundbildungskurse während ihrer Schulzeit Ordinalität und Kardinalität nicht richtig voneinander trennen konnten und u. a. dieser Fehlgedanke das mathematische Lernen beeinträchtigt hat.

Werden Zahlen nicht als Anzahlen gedacht, muss nach erfolgreicher Lösung der Aufgabe 9 + 3 die Aufgabe 3 + 9 erneut *ausgezählt* werden. Hierbei fallen häufig Zählfehler um eins auf, weil einerseits nicht immer klar ist, an welcher Position mit dem Zählen begonnen werden muss. Andererseits erfordert das einzelne Abschreiten der Zahlenreihe bei gleichzeitiger Buchführung über die Zählschritte ein hohes Maß an Konzentration. Die Fehleranfälligkeit ist deutlich erhöht. Die Fehleranfälligkeit erhöht sich beim Operieren mit größeren Mengen noch einmal, da eine größere Anzahl an Zählschritten notwendig ist. Die Aufgabe 9 + 3 wird deshalb von einigen *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* schneller gelöst werden können als die Aufgabe 3 + 9.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Um sich mit dem kardinalen Zahlaspekt auseinanderzusetzen, bedarf es eines abgesicherten Wissens um die Invarianz von Mengen: Eine Menge bleibt gleich groß (sie ist invariant), wenn kein Element entnommen oder hinzugefügt wurde. Des Weiteren sollten den Teilnehmer*innen die Ziffern und Zahlwörter zu den Zahlen bis zehn bekannt sein.

Weitere Ausführungen zum Thema der Invarianz von Mengen können Sie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen im Unterpunkt 1.1.1 Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianzverständnis (S. 12) nachlesen.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Hintergrundwissen zum kardinalen Zahlaspekt finden Sie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen im Unterpunkt *1.2.6 Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt (S. 28 ff)*

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): *DVV-Rahmencurriculum Rechnen*. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.

- Zum Invarianzverständnis bezogen auf Mengen: *Stufe 1, S. 12*
- Zum Zählen und Abzählen: *Stufe 1, S. 13 ff.*
- Zur Klassifikation und Seriation: *Stufe 1, S. 15 f.*
- Zu den Darstellungsformen von Zahlen: *Stufe 1, S. 25 f.*
- Zur Nutzung der Zahl als Kardinalzahl: *Stufe 1, S. 29 ff.*
- Zur simultanen Zahlerfassung: *Stufe 1, S. 30 f.*
- Zehner- und Einer-Begriff: *Stufe 1, S. 38 f.*

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Gespräch – 2.1 Zahlnutzung: ca. 20 – 30 Karteikarten
- Aufgabenblätter – 2.1 Zahlnutzung: einige Scheren und Klebestifte
- Gespräch – 2.2 Der kardinale Zahlaspekt: Platzkarten mit Ordnungszahlen von 1. bis 10.
- Gespräch/Gruppenarbeit – (Ab)Zählfehler und Zählprinzipien: eine große und unüberschaubare Menge an Steckwürfeln, Wendeplättchen, Chips o. ä.
- Partner*innenübung – 2.4 Formen der Darstellung und Weitergabe von Zahlen: ca. 20 – 30 Karteikarten

2.1 Funktionen von Zahlen und Zahlnutzung

EXPLORATION

Das folgende Kursgespräch und die Aufgabenblätter laden die Teilnehmer*innen ein, gemeinsam über die unterschiedlichen Verwendungen von Zahlen zu diskutieren. Wenn man Menschen befragt, wozu sie Zahlen eigentlich brauchen, hört man häufig Antworten wie: „zum Rechnen“, „in der Schule“ oder „für den Matheunterricht“. Aufgrund dieser – nicht ausschließlich, jedoch sehr häufig – anzutreffenden, eingeschränkten Sicht auf Zahlen und Mengen wird in den folgenden Stunden mit den Teilnehmer*innen ein Überblick über die verschiedenen Verwendungen von Zahlen erarbeitet. So ist es ihnen besser möglich, die Zahlen in verschiedenen Situationen sachadäquat zu verwenden.

Die Teilnehmer*innen werden gemeinsam mit der Kursleitung feststellen, dass sie jeden Tag mit Zahlen und Mengen konfrontiert sind und damit bereits erfolgreich umgehen, ohne dass es ihnen in jeder Situation bewusst ist. Zudem sollen sie einen vielseitigen und umfassenden Blick auf Zahlen und Mengen entwickeln. Damit können den Teilnehmer*innen auch Ängste vor einem Kurs, in dem *nur* gerechnet wird, genommen werden – denn in den folgenden Stunden werden die Teilnehmer*innen aufgefordert, ihr „Alltags“-Wissen und ihre persönlichen Erfahrungen mit Zahlen aktiv in das Unterrichtsgeschehen mit einzubringen.

ZAHLNUTZUNG? ZAHLGEBRAUCH? ZAHLBEDEUTUNG? ZAHLBEGRIFF?

Wir werden in diesem Kurs überwiegend den Begriff *Zahlnutzung* verwenden, da dieser in der schlichtesten Weise wiedergibt, dass zunächst davon die Rede ist, auf welche Art und Weise und in welchen unterschiedlichen Kontexten Zahlen genutzt werden. Hierfür könnte man ebenso den Begriff *Zahlgebrauch* verwenden. Manchmal ist auch der Begriff *Zahlbedeutung* zu finden, da verschiedene Zahlnutzungen mit unterschiedlichen Bedeutungen der Zahlen arbeiten. In der Mathematikdidaktik ist der Begriff *Zahlaspekt* üblich. Dieser wenig verständliche Begriff stammt wahrscheinlich daher, dass die „Zahlnutzungen“ sehr verschiedene Charaktere haben. So kann man der kardinalen, ordinalen und relationalen Zahlnutzung einen philosophischen Charakter zuschreiben: Man hat lange darüber gestritten, ob Zahlen eher kardinale oder ordinale Gebilde sind, was also die Wesenseigenschaft der Zahl ist. Entsprechend kann man vom *kardinalen* und *ordinalen Zahlbegriff* sprechen.

Die Codierungsnutzung ist im Vergleich dazu eher von schlichterer Natur. Man kann Zahlen codierend nutzen, dabei ist hingegen keine Wesenseigenschaft der Zahl zu finden. Die Nutzung als Rechenzahl scheint wiederum eine Art Restekategorie zu sein: Bei der Auflistung der Charakteristiken und der Nutzungsmöglichkeiten von Zahlen bemerkt man, dass Zahlen beim Rechnen oftmals eben gerade nicht im kardinalen, ordinalen oder sonstigen Sinne genutzt werden. Und genau hier liegt ein Kernproblem der Teilnehmer*innen: Sie haben ihre Rechenprozeduren nicht an kardinale Bedeutungen angebunden, sondern nutzen sie als Objekte von Prozeduren, die man Rechnen nennt. Genau das machen gute Rechner*innen auch: Sie arbeiten beim Rechnen nicht mit der kardinalen oder ordinalen Deutung der Zahl, sondern vollziehen lediglich Prozeduren. Der Unterschied ist, dass gute Rechner*innen diese Prozeduren an die kardinale Bedeutung der Zahlen zurückbinden können. Und eben diese Fähigkeit werden die Teilnehmer*innen oftmals erst noch erlangen.

2.1.1 Kursgespräch Zahlnutzung

Didaktische Ziele
- unterschiedliche Verwendungen von Zahlen im Alltag erkunden
- die wesentlichen Zahlaspekte (Kardinalzahl, Ordnungszahlzahl, Maßzahl, Rechenzahl und Codierung) kennen und in praktischen Beispielen unterscheiden

Beispiele für die Zahlnutzung erfragen, Kursleitung notiert die Beispiele auf Karten

Wo kommen Zahlen überall vor?

oder

Wofür brauchen wir überhaupt Zahlen?

können naheliegende Einstiegsfragen zum Themenbereich der Zahlnutzung sein. Die Teilnehmer*innen werden womöglich folgende oder ähnliche Antworten geben:

„im Matheunterricht“

„bei der Uhr“

„zum Zählen“

„beim Kochen und Backen“

„zum Rechnen“

Mit diesen Antworten haben die Teilnehmer*innen die wesentlichen Nutzungsmöglichkeiten von Zahlen bereits genannt:

a **Nutzung als Maßzahl:** Hier gibt die Zahl die Menge einer bestimmten Einheit an.

> **BEISPIELE**
> 5 Meter, 3 Stunden, 500 Gramm, 200 Euro

b **Nutzung als Rechenzahl:** Zahlen können zusammengefasst werden, aus einer Menge kann eine Teilmenge entnommen werden, eine Menge kann hinzugefügt werden, Zahlen können vervielfacht, eingeteilt oder verteilt werden.

> **BEISPIELE**
> $3 + 2 = 5$; $6 : 3 = 2$

Zum Thema der Unterscheidung des Zahl- und Mengenbegriffs finden Sie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen Kapitel 1.3 und 2.4 nähere Erläuterungen.

c **Nutzung als Kardinalzahl:** Zahlen geben die Mächtigkeit einer Menge an, d. h. sie geben die Anzahl der Elemente einer Menge wieder. Zahlen sind also die Antwort auf die Frage: Wie viele?

> **BEISPIELE**
> An der Straße stehen 3 Autos. Dort liegen 7 Dinge. Ich habe 8 Kekse gegessen. Dort sind zwölf.[4]

Weniger präsent sind häufig folgende Zahlaspekte:

d **Nutzung als Ordnungszahl/Ordinalzahl:** Zahlen beschreiben die Position in einer Rang- bzw. Reihenfolge. Zahlen sind also die Antwort auf die Fragen: Der/Die/Das wievielte? Welche Nummer? …

> **BEISPIELE**
> der erste Platz, das zehnte Mal, Haus Nr. 104, Platznummer Reihe 3 Sitz 12, der Letzte

e **Nutzung zur Codierung:** Zahlen sind der Code, also der Schlüssel für etwas, mit den Zahlen wird eine Person, ein Telefonanschluss oder ein Ort verschlüsselt.

> **BEISPIELE**
> Autonummernschilder, Telefonnummern, Postleitzahlen, Steuernummer, Mitgliedsnummer, Rechnungsnummer

Einige Situationen, in denen Zahlen auftreten, lassen sich nicht eindeutig einem der oben genannten Zahlaspekte zuordnen: zum Beispiel Lottozahlen, Zahlen in Kapitänsaufgaben[3].

Sicher ist es günstig, bei dieser Übung keine Beispiele vorzugeben, jedoch empfiehlt es sich für die Kursleitung, ein paar Beispiele für alle Zahlnutzungen in der Hinterhand zu haben.

Zahlverwendungen gruppieren

Wurden die Antworten der Teilnehmer*innen auf Karten notiert, so können sie jetzt an der Tafel gruppiert werden.

Mögliche Fragen, um die gegebenen Antworten zu gruppieren, können sein:

Sind zwei Beispiele ähnlich oder gleich? Welche Beispiele gehören zusammen? Welches Beispiel passt nicht dazu?

Was macht/Welche Funktion hat die Zahl in diesem Beispiel? Wofür ist die Zahl in Ihrem Beispiel da?

Könnte die Zahl in diesem Fall nicht einfach weggelassen werden? Warum nicht?

Welche Rolle spielt die Zahl in diesem Beispiel?

Gibt es ähnliche Beispiele wie das von Ihnen genannte?

Die Teilnehmer*innen müssen zum Gruppieren der Antworten nicht unbedingt die Begrifflichkeiten (die Kategorien der Zahlnutzung) kennen. Sicherlich aber können sie begründen, wenn Beispiele ähnlich sind und deshalb möglicherweise in eine Kategorie fallen, also eine ähnliche Zahlnutzung erfahren.

Die Kategorie der Zahlnutzung herausstellen

Um sich im Anschluss an die Gruppierung den Zahlnutzungen zu nähern, ist es förderlich, wenn die Teilnehmer*innen versuchen, die Funktion der Zahlen in den Beispielen zu vergleichen und Gemeinsamkeiten zwischen den Zahlnutzungen zu finden.

BEISPIEL 1
zur Herausstellung der Zahlnutzungskategorie

Es werden die Antworten „zum Rechnen“ und „beim Einkaufen“ genannt. Auch ohne dass die Zahlaspekte bekannt sind, könnte ein*e Teilnehmer*in auf die Frage „Was haben die beiden Verwendungen gemeinsam?“ beschreiben, dass bei beiden Beispielen die Zahlen zusammengerechnet werden (Nutzung als Rechenzahl).

Mögliche Fragen, um die Teilnehmer*innen zur Zuordnung der Beispiele zu den Zahlnutzungen hinzuleiten wären:

Was haben diese Beispiele gemeinsam?

Warum sind diese Beispiele ähnlich? Was wird in den Beispielen mit den Zahlen gemacht?

Wofür sind die Zahlen in diesen Beispielen da?

BEISPIEL 2
zur Herausstellung der Zahlnutzungskategorie

Es werden die Antworten „bei der Postleitzahl“ und „beim Nummernschild“ genannt. Auch ohne dass die Kategorien der Zahlnutzungen namentlich bekannt sind, könnte ein*e Teilnehmer*in auf die Frage „Wofür sind die Zahlen in Ihrem Beispiel da?“ beschreiben, dass in beiden Beispielen die Zahlen zu Personen oder Orten gehören (Nutzung zur Codierung).

Die Antwort „beim Einkaufen“ verdeutlicht, dass Zahlen in einer Situation in unterschiedlicher Art und Weise genutzt werden können. Aus der Antwort „zum Einkaufen“ kann nicht direkt abgeleitet werden, welche Zahlnutzung hier angesprochen werden soll. Mit der Antwort „zum Einkaufen“ wurde nicht ausreichend konkretisiert, welche Zahlen beim Einkaufen denn gemeint sind. An folgenden Beispielen wird deutlich, dass Zahlen in einer Situation zu verschiedensten Zwecken genutzt werden können:

- Rechnungssumme (25,78 € = 25 € und 78 ct): Nutzung als Maßzahl und (bei anzahlhafter Vorstellung) als Kardinalzahl
- Anzahl der Lebensmittel, die gekauft wurden (12 Artikel liegen im Einkaufskorb): Nutzung als Kardinalzahl
- Mehrere Artikel eines Produktes wurden gekauft (5 · eine Milch): Nutzung als Kardinalzahl und Maßzahl
- Aus einem Regal wurden einige der Artikel entnommen und in den Einkaufswagen gepackt (13 Radierer – 4 Radierer = 9 Radierer): Nutzung als Rechen-, Maß- und Kardinalzahl
- Der Kunde überschlägt schon vor dem Bezahlen, wie viel er ungefähr bezahlen muss (2 € + 4 € + ….. ≈ 27 €): Nutzung als Maß-, Rechen- und (bei anzahlhafter Vorstellung) Kardinalzahl

- Die Bonnummer (wenn fortlaufend nummeriert): Nutzung als Ordnungszahl und zur Codierung
- Steuernummer auf dem Kassenzettel: Nutzung zur Codierung
- Für ein Gewinnspiel gibt es einen Gewinncode auf dem Kassenzettel: Nutzung zur Codierung
- Datum auf dem Kassenzettel: Nutzung als Maß- und Ordnungszahl, auch als Codierung deutbar

Das letzte Beispiel, ein Datum, ist besonders gut geeignet, um Zahlverwendungen zu diskutieren und darüberhinaus aufzuzeigen, dass es nicht immer nur eine richtige Antwort gibt. Viele Teilnehmer*innen haben es während der Erprobungsphase als äußerst motivierend empfunden, mit der Kursleitung und den anderen Teilnehmer*innen die diversen möglichen Deutungen zur Zahlnutzung zu diskutieren.

Außerdem hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Kategorien der Zahlnutzung (Nutzung als Maßzahl, Nutzung als Rechenzahl, Nutzung als Ordnungszahl, Nutzung zur Codierung) einzeln auf A4-Blätter zu drucken, um sie dann im Kursraum aufzuhängen. So können in den sich anschließenden Stunden durch die Kursleitung immer wieder Querverbindungen zu diesem Thema hergestellt und die Konsequenzen für bestimmte Aufgabenstellungen analysiert werden.

2.1.2 Einzelarbeit und Aufgabenblatt 2.1 a Zahlnutzung

Didaktisches Ziel
Vertiefung: Praktische Beispiele der Nutzung von Zahlen werden selbständig den unterschiedlichen Kategorien der Zahlnutzung zugeordnet.

Mit den **Kopiervorlagen 1 und 2** kann die Kursleitung überprüfen, ob alle Teilnehmer*innen selbstständig zwischen den unterschiedlichen Zahlnutzungen differenzieren können. Darüber hinaus soll die eigenständige Beschäftigung mit diesem Thema ein intensiveres Nachdenken befördern, weitere Diskussionen anstoßen und für die Teilnehmer*innen Erfolgserlebnisse schaffen, ohne dass dazu gerechnet werden musste.

Allen Teilnehmer*innen wird die **Kopiervorlage 1** und jeweils die bereits ausgeschnittenen Beispiele von **Kopiervorlage 2** ausgehändigt.

Die Arbeitszeit wird ca. 15 bis 20 Minuten betragen. Anschließend sollte jede*r Teilnehmer*in ein Beispiel vortragen und die Zuordnungsentscheidung begründen. Bei mehreren Beispielen sind unterschiedliche Zuordnungen sinnvoll. Es ist trotzdem nur jeweils ein Kärtchen vorhanden, damit die Teilnehmer*innen erleben, dass in der Mathematik verschiedene Lösungen sinnvoll sein können. Beteiligen sich die Teilnehmer*innen nicht an einer Diskussion, so kann die Kursleitung Beispiele falsch zuordnen und dann die Teilnehmer*innen fragen, ob richtig zugeordnet wurde. Wenn nicht, sollte geklärt werden, warum diese Beispiele nicht richtig zugeordnet sind und welche die korrekte Zuordnung ist.

Mit dem **Aufgabenblatt 2.1 a** kann eine ähnliche Aufgabenstellung zur Wiederholung bzw. Vertiefung als Hausaufgabe mitgegeben werden. Praktische Beispiele für die unterschiedliche Nutzung von Zahlen sollen der passenden Kategorie (Maßzahl, Rechenzahl, Kardinalzahl, Codierung und Ordnungszahl) zugeordnet werden. Die Teilnehmer*innen können sich dabei auch wieder selbst Beispiele ausdenken.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen haben in Kapitel 2.1 ein Verständnis über die Bandbreite der Verwendung von Zahlen im Alltag erlangt. Sich mit Mathematik und Zahlen zu beschäftigen beinhaltet nicht nur das Rechnen, da Zahlen in vielen weiteren Kontexten verwendet werden. Zahlen werden auch zum Codieren, Messen, Bilden von Reihenfolgen, Operieren und zur Beantwortung der Frage „Wie viele?“ genutzt.

Möglicherweise steht nach der Bearbeitung der Aufgabenblätter die Erkenntnis, dass die Teilnehmer*innen in vielen Bereichen schon gut und sicher mit Zahlen umgehen. Diese Erkenntnis motiviert zur Teilnahme und stärkt das Selbstvertrauen. Und bei der späteren Erarbeitung der Rechenoperationen wird immer wieder auf den Aspekt der kardinalen Zahlnutzung zurückgegriffen werden.

2.2 Der kardinale Zahlaspekt

2.2.1 Kursgespräch Ordnungszahl und Anzahl unterscheiden

Didaktische Ziele
- Zahlen als „Platz in einer Reihenfolge“ oder als „Anzahl von etwas“ sicher unterscheiden
- Schreib- und Sprechweise von Ordnungszahlen kennen und richtig benutzen

EXPLORATION

Zahlen können unterschiedlich genutzt werden. Ziel der folgenden Stundenkonzepte ist die Bewusstwerdung und Auseinandersetzung mit dem Unterschied zwischen ordinaler und kardinaler Zahlnutzung. Dabei geht es keineswegs um die korrekte Anwendung der Begriffe *ordinal und kardinal*, sondern vorrangig um das Verständnis der Unterschiede und deren praktische Konsequenzen. Wie bereits in Kapitel 2.1 erläutert, ist ein fehlender oder nur rudimentär vorhandenes Verständnis über die kardinale Zahlnutzung häufig Ursache der Ausprägung von *Schwierigkeiten im Rechnen*. Das Verständnis von Inhalt und Aufbau einer Zahl, d. h. von der Anzahlhaftigkeit und den dazugehörigen Zahlbeziehungen sind die Voraussetzungen für ein gutes mathematisches Grundverständnis. Um die Anzahlhaftigkeit, die Kardinalität, zu verdeutlichen, hat sich die Abgrenzung zur Ordinalität als hilfreich erwiesen.

Zunächst erläutert die Kursleitung das Thema der folgenden Unterrichtseinheit. Anschließend erfragt sie mögliches Vorwissen der Teilnehmer*innen.

Was ist mit Ordnungszahl/Ordinalzahl genau gemeint? Kennen Sie den Begriff Kardinalzahl?

Vor allem der Begriff „Ordnungszahl“ könnte bei den Teilnehmer*innen eigene Ideen und Assoziationen hervorbringen.

Daran anschließend wird der Unterschied zwischen beiden Zahlnutzungen anhand der Teilnehmer*innen-Gruppe verdeutlicht:

Wie viele Menschen sind in diesem Raum?

Wie haben Sie das herausgefunden?

Die Kursleitung stellt folgende Fragen, um zu verdeutlichen, dass die Reihenfolge bei der Ermittlung der Anzahl nicht relevant ist.

*Ändert sich die Anzahl, wenn Sie die Menschen in einer anderen Reihenfolge zählen? Zählen Sie zuerst Brillenträger*innen, dann diejenigen ohne Brille. Danach umgekehrt. Sie haben unterschiedliche Handlungen ausgeführt und bekommen das gleiche Ergebnis. Woran liegt das?*

Stellen Sie sich in einer Reihenfolge auf, die deutlich macht, wer Mathematik in der Schule am schrecklichsten fand. Halten Sie dabei Ihre Platzkarten (Ordnungszahlen von 1. bis 10.) entsprechend der Rangfolge in den Händen oder legen Sie sie vor sich auf den Boden.

Ordnen Sie sich nach der Anzahl ihrer Besuche im Café pro Monat. Stellen Sie sich der Größe nach auf. Bitte bilden Sie eine Rangfolge nach der Haarfarbe, beginnend mit der hellsten Haarfarbe.

Es können unterschiedliche Reihenfolgen gebildet werden. Die Teilnehmer*innen werden durch die Kursleitung aufgefordert, sich entlang der neuen Reihenfolgen aufzustellen und die Karten mit den Ordnungszahlen entsprechend in die Hand zu nehmen. Gleichzeitig kann und soll über Rangfolgen diskutiert werden. Die Frage nach dem Mathematikunterricht macht zudem deutlich, dass es Unschärfen bei der Bildung von Rangfolgen geben kann und Zahlen keineswegs immer ganz genau die Wirklichkeit abbilden. Wer entscheidet denn, wer Mathematik am schrecklichsten fand? Was könnten Kriterien dafür sein?

Um später mit den Reihenfolgen zu arbeiten, sollten diese notiert werden. In diesem Zusammenhang wird auch thematisiert, dass die Reihenfolge z. B. mit der größten, aber auch mit der kleinsten Person begonnen werden kann.

Wie ändert sich dann die jeweilige Nummer in der Reihenfolge?

Wer eben noch an zweiter Position der Reihe gewesen ist, kann nun den fünften Rangplatz belegen.

Während des Notierens oder Aufstellens von Rangfolgen/Ordnungen kann von der Kursleitung der Unterschied zwischen Kardinal- und Ordnungszahl durch Fragen in den Fokus der Teilnehmer*innen gebracht werden. Als Hilfsformulierung zur besseren Unterscheidung beider Zahlnutzungen kann bezüglich der Kardinalzahl auch „Die Antwort auf die Frage *Wie viele*" genutzt werden.

Wie viele Menschen vergleichen gerade ihre Körpergröße miteinander? (Gesamtmenge – kardinal)

Wer hat den letzten Platz der Rangfolge?

Welchen Rangplatz hat jemand? (Rangplatz – ordinal)

So wird deutlich, dass z. B. der achte Platz trotzdem nur *ein* Mensch ist, obwohl sie*er den achten Platz/die Nummer Acht der Reihenfolge einnimmt. Acht bedeutet demnach nicht in jedem Zusammenhang das Gleiche.

Sind der zweite und der dritte Platz zusammen fünf Plätze? Warum nicht? – Zwei und drei sind doch zusammen fünf.

*Was passiert mit der Reihenfolge, wenn eine*r von Ihnen den Raum verlässt oder an einem Tag krank und nicht bei der Gruppe ist?*

Die Änderungen in den Reihenfolgen sollten nun von den Teilnehmer*innen verglichen und versprachlicht werden: Die Gesamtmenge hat sich verändert, die Rangplätze jedoch erst ab der Person, die nicht mehr Teil der Rangfolge ist. Wer eben noch hinter der Person stand, die die Reihenfolge verlassen musste, rückt eine Nummer nach vorn. Wer eben bspw. noch Nummer 6 der Reihe gewesen ist, ist nun die Nummer 5 der Reihe.

„Eine Nummer" (ein*e Teilnehmer*in mit der Nr. …) wird aufgefordert die Reihe zu verlassen (bspw. Nummer 6 – ordinal).

*Wie ändert sich die Reihenfolge? Was passiert, wenn nicht die Nummer sechs die Reihe verlässt, sondern sechs Teilnehmer*innen?*

In beiden Aufforderungen spielt die Zahl Sechs eine Rolle. Was ist der Unterschied zwischen diesen Aufforderungen:

*„die*der sechste Teilnehmer*in soll den Raum verlassen"*	*„sechs Teilnehmer*innen sollen den Raum verlassen"*

Die Teilnehmer*innen können nun selbst Änderungen an der Reihenfolge vornehmen und sich ausprobieren, indem sie entweder kardinale oder ordinale Änderungen an der Rangfolge vornehmen.

*Die*Der dritte Teilnehmer*in soll die Reihe verlassen.*

*Drei Teilnehmer*innen sollen die Reihe verlassen.*

*Die*Der Zweite und Vierte sollen die Reihe verlassen.*

Bei jeder Änderung sollte versprachlicht werden, was sich an der Gesamtmenge verändert hat und wie sich die Rangplätze verschoben haben.

Den Teilnehmer*innen sind Ordnungszahlen bzw. Rangfolgen aus dem Alltag bekannt. Sinnvoll ist es, diese Ideen und Alltagserfahrungen im Kurs zu erfragen und zu besprechen. Mögliche Beiträge der Teilnehmer*innen könnten sein: Rangfolgen aus Wettkämpfen, Startnummern bei Sportveranstaltungen, Hausnummern, Reihenfolgen auf Listen, Reihenfolgen von bestimmten Abläufen (Tages- oder Urlaubsplanung) und Sitzplätze im Kino.

Unbedingt thematisiert werden sollte die Schreibweise von Ordnungszahlen. Einige „Anweisungen" werden notiert und besprochen. Ordnungszahlen hören sich anders an als Kardinalzahlen: sechste, achte, zwölfter, etc. und werden anders als Kardinalzahlen notiert: 6., 8., 12. bzw. 2te, 10ter. Sollte der Punkt vergessen werden, so ändert sich die Aussage: *„Hätten Sie gern den 5. oder 5 Euro?“. „Möchten Sie sechs Plätze oder den sechsten Platz buchen?“*

Bei Trikot- oder Hausnummern (Dorfstraße 7) und Sitzplätzen (Reihe 9, Platz 8) erkennt man hingegen nicht an der letzten Silbe oder einem Punkt, dass es sich um eine ordinale Zahlverwendung handelt.

RÜCKSCHAU

In der vorangegangenen Kurssitzung ist allen Teilnehmer*innen bewusst geworden, dass Zahlen sowohl ordinal als auch kardinal verwendet werden können. Entweder die Zahl bezeichnet einen Platz in einer Reihenfolge oder die Anzahl von etwas. Diese beiden Zahlverwendungen müssen strikt voneinander unterschieden werden. Verschiedene Praxisbeispiele des ordinalen und kardinalen Zahlaspektes sollten den Teilnehmer*innen bekannt sein. Sie sind in der Lage, die Zahlaspekte unterscheiden zu können.

2.2.2 Kursgespräch und Aufgabenblätter 2.2 a, 2.2 b und 2.2 c – Oberbegriffe

Didaktische Ziele
- Festigung des kardinalen Zahlverständnisses über die Auseinandersetzung mit der Zusammenfassbarkeit von Mengen unter gemeinsamen Oberbegriffen
- Kriterien kennen, mit denen das Zusammenfassen unter einen Oberbegriff beurteilt und begründet werden kann

Bei der Beschäftigung mit der kardinalen Nutzung von Zahlen ist die Oberbegriffsbildung von großer Bedeutung. Um Dinge, Lebewesen oder andere Objekte zusammenzuzählen, muss überlegt werden, welche sich davon überhaupt zusammenfassen lassen. Es stellt sich die Frage, ob es einen gemeinsamen und übergeordneten Ausdruck für die Mengen oder Elemente gibt – einen gemeinsamen Oberbegriff. Die Aufgabenblätter und das sich anschließende Gespräch über Oberbegriffe sollen sich dieser Frage widmen.

Zur Verdeutlichung bietet sich folgendes Beispiel an: Der zweite und der dritte Apfel sind zusammen nicht fünf Äpfel, sondern zwei – das ist spätestens seit der Beschäftigung mit Ordinal- und Kardinalzahlen bekannt. Zwei und drei Äpfel sind zusammen fünf Äpfel. Wie viel sind aber zwei Pferde und drei Pferdedecken zusammen? Sind sie zusammen fünf Pferde, fünf Pferdedecken, fünf Dinge, einfach Fünf oder kann man sie schlicht nicht zusammenrechnen?

BEISPIELE

2 Pferde + 3 Pferdedecken =

- 5 Pferde?
- 5 Pferdedecken?
- 5 Pferde + 5 Decken?
- 5 Pferde und Decken?
- 5?

2 + 3 = 5

Die folgenden Aufgabenblätter sollen eine Diskussion über Oberbegriffe anstoßen, werden jedoch keine abschließende Lösung für die oben genannten Probleme geben. Denn im Widerspruch zu der Meinung, dass man für alles, das man zusammenzählen möchte einen Oberbegriff benötigt, steht das Abstraktionsprinzip. Dieses wird Thema im Kapitel 2.3 *(Ab-)Zählfehler und Zählprinzipien* sein. In Kapitel 2.3 und im vorliegenden Kapitel wird die Frage der Zusammenfassbarkeit verschiedener Gegenstände und/oder Lebewesen jedoch immer wieder auftauchen. Schwierig wird sein, dass auch die Kursleitung diese Frage den Teilnehmer*innen nicht endgültig beantworten kann. Positiv hingegen ist die Tatsache, dass alle Fragen, die nicht endgültig beantwortet werden können, einen Raum für Diskussion und zur Argumentation bieten. Es wird für die Kursleitung sowie für die Teilnehmer*innen ungewohnt sein, auf mathematische Sachfragen keine eindeutige Antwort zu geben bzw. zu bekommen. Aber auch das gehört zum mathematischen Lernprozess.

RÜCKSCHAU

Dieses Unterrichtskonzept bietet Raum für Diskussionen und zur intensiven Auseinandersetzung mit der Zusammenfassbarkeit von Mengen. Ziel ist einerseits die geistige Flexibilisierung und andererseits auch ein Üben im Argumentieren. Da es bei den vorliegenden Aufgabenblättern nicht immer eine eindeutige Antwort gibt, bieten diese Raum sich detaillierter und argumentativ mit den Inhalten auseinanderzusetzen.

Beim bloßen Ausfüllen der Aufgabenblätter sind mit großer Wahrscheinlichkeit keine Probleme zu erwarten, trotzdem werden bei den Teilnehmer*innen Fragen auftauchen.

Die Fragen auf den Aufgabenblätter, auf die es nicht immer nur eine richtige Antwort gibt, sind im Zusammenhang mit Mathematikunterricht sehr ungewöhnlich. Darüberhinaus wird sich im schulischen Kontext selten bewusst gemacht, was zusammengerechnet werden kann und was nicht. Das fällt vor allem bei der Bearbeitung von Sach- und Textaufgaben und der Erarbeitung der Multiplikation auf. Hier einige Beispiele:

BEISPIELE

Tom hat 2 Euro und ist 8 Jahre alt. Zusammen sind es 10 … ?

7 Pferde · 3 Pferde = 21 Quadratpferde?

Im Beratungsraum stehen 12 Tische. An diesen sitzen insgesamt 24 Personen. Es sind 36 … ? An jedem Tisch sitzen …

Was ist hier jeweils die Frage? Was kann berechnet werden?

Mathematik erfordert nicht nur das problemlose Zusammenrechnen von Zahlen, sondern auch eine inhaltliche Auseinandersetzung, geistige Flexibilität und einen kritischen Blick auf Frage- bzw. Aufgabenstellungen, bevor „losgerechnet" werden kann.

Jede*r Teilnehmer*in erhält jeweils ein **Aufgabenblatt 2.2 a, 2.2 b** und **2.2 c**. Erläutern Sie die Aufgaben und das Ziel der Aufgabenbearbeitung. Weisen Sie unbedingt darauf hin, dass es nicht die eine richtige Antwort gibt, sondern *mehrere richtige* Eintragungen möglich sind. Es geht bei der Bearbeitung darum, den Anstoß zu einer Diskussion zu geben, nicht aber um das Finden der einzig richtigen Antwort. Die Bearbeitung wird ca. 10 bis 15 Minuten in Anspruch nehmen.

Möglich wäre es auch, zuerst ein Aufgabenblatt gemeinsam zu bearbeiten, damit die Teilnehmer*innen wissen, um was es beim Ausfüllen gehen soll. Die anderen zwei Aufgabenblätter sollten allein bearbeitet werden, sodass jede*r Teilnehmer*in sich selbst Gedanken machen muss, kritische Nachfragen entwickelt und geeignete Antworten finden kann. Im Anschluss an jedes Aufgabenblatt sollten die Ergebnisse in der Gruppe diskutiert werden. Ist der Kurs sehr groß, kann auch in Kleingruppen diskutiert werden, welche nach der Bearbeitung ihre Ergebnisse vorstellen.

Folgende Fragen können bei der Bearbeitung der Aufgabenblätter auftreten:

Kann man einfach alles zusammenzählen oder braucht man einen gemeinsamen Begriff?

Dies wird mit der Frage *„Ist es richtig, wenn jemand behauptet „Auf den Bildern oben sind es insgesamt sechs?"* thematisiert.

AUFGABENBLATT 2.2 a

Um in der Lage zu sein, Oberbegriffe zu finden, müssen die Teilnehmer*innen gemeinsame Eigenschaften der verschiedenen Elemente benennen können.

Bleibt die Anzahl/Gesamtmenge gleich, auch wenn ich nicht beim ersten Element mit dem Zählen beginne?

AUFGABENBLATT 2.2 b

Die Frage *„Ändert sich die Menge, wenn ich mit dem Zählen bei dem Tacker beginne?“* zielt auf das Verständnis der Invarianz von Mengen ab. Eine der ersten und wesentlichen Erkenntnisse bei der Beschäftigung mit Mengen ist die, dass eine Menge immer gleich bleibt, wenn kein Element entfernt oder hinzugefügt wird und dass die Reihenfolge beim Abzählen der Elemente keinen Einfluss auf die Anzahl hat (Zählprinzipien der beliebigen Reihenfolge/Mengeninvarianz). Nun stellt sich die Frage, ob die bloße Anzahl auch eine Gemeinsamkeit der Elemente darstellt.

Auf dem Aufgabenblatt unterscheiden sich die Abbildungen in den Kästchen wesentlich. Obwohl es unterschiedliche Gegenstände sind, sind auf drei der Bilder jeweils *eine* Schere, *ein* Tacker und *ein* Stempel zu sehen. Die gemeinsame Eigenschaft ist die Anzahl eins.

AUFGABENBLATT 2.2 a

Einerseits gibt es drei Früchte, andererseits drei Büromaterialien.

Es sind immer drei! Ist das bereits eine gemeinsame Eigenschaft, demnach ein Oberbegriff?

Es ist ungewohnt in der Anzahlhaftigkeit eine Eigenschaft zu erkennen. Wir können u. a. nach dem Ausprägungsgrad der Temperatur, Länge, Tonhöhe und des Geschmacks differenzieren – aber eben auch nach der Eigenschaft „Anzahlhaftigkeit“. Man könnte demnach bei dem Spiel „Ich sehe was was du nicht siehst“ auch sagen „[…] und das sind drei!“ oder „[…] und das ist dreifach!“.

Welche gemeinsamen Eigenschaften gibt es noch?

Die Teilnehmer*innen sollten sich darin üben (gemeinsame) Eigenschaften zu benennen und somit Oberbegriffe zu finden.

AUFGABENBLATT 2.2 c

Was wird gezählt? Die einzelnen Erdbeeren oder die ganze Schüssel?

Ein Teil der Teilnehmer*innen könnte zur Erkenntnis gelangen, dass nicht zu bestimmen ist, wie viele es auf dem Bild sind, da ein Teil der Menge verdeckt ist. Andere Teilnehmer*innen hingegen zählen das Objekt als eins, denn es ist *eine* Schüssel mit Erdbeeren.

Vielleicht werden weitere Diskussionspunkte und Fragestellungen gefunden. Dies bietet dem Kurs, wie bereits erwähnt, die Möglichkeit zur Diskussion, weil es nicht *die eine* richtige Lösung gibt. Zudem wird ein weiterer Irrglaube thematisiert: Die Kursleitung, damals die*der Mathematiklehrer*in, hat nicht immer die passende und richtige Antwort auf alle Fragestellungen und Rechenaufgaben.

2.2.3 Gruppenarbeit Oberbegriffe

Didaktische Ziele

- Kriterien für das Zusammenfassen unter einen gemeinsamen Oberbegriff an praktischen Beispielen richtig anwenden
- entscheiden und begründen, ob das Zusammenfassen verschiedener Mengen sinnvoll ist oder nicht

EXPLORATION

Mit der folgenden Gruppenarbeit soll das Thema *Oberbegriffe* abgeschlossen und alle Erkenntnisse der Teilnehmer*innen zusammengefasst werden.

Hierbei stehen die Maßzahlen und Dinge, die man zusammenrechnen kann, im Fokus. Die Teilnehmer*innen sollen verstehen, dass beispielsweise in Sachaufgaben nicht einfach alle Zahlen beliebig und ohne Berücksichtigung der Einheiten/Eigenschaften zusammengerechnet werden können. Vor dem Rechnen ist zu klären, ob diese Einheiten, Buchstaben oder Dinge überhaupt zusammengefasst werden können. Darüber hinaus sollen hier erneut Einer und Zweier betrachtet werden. Es soll deutlich werden, dass Einer, Einsen, Zweier, Zehner eine abstrakte Form der Mengenbetrachtung, losgelöst von jeder Eigenschaft, ist.

KOPIERVORLAGE 3

Gruppenarbeit Oberbegriffe

Für die folgende Übung sollten Gruppen von zwei bis drei Teilnehmer*innen gebildet werden. Jede Gruppe braucht einen Tisch, um dort später Karten aufzudecken und zu sortieren. Die Kursleitung teilt an jede Gruppe einen kompletten Satz der kopierten und ausgeschnittenen Kärtchen aus der Kopiervorlage aus.

Diese Kärtchen werden verdeckt auf einen Stapel auf den Tisch gelegt. Eine der Karten wird schon zu Beginn aufgedeckt und in die Mitte des Tisches gelegt.

Auf der Kopiervorlage gibt es noch freie Felder. Haben die Teilnehmer*innen interessante Mengenangaben gefunden oder Ideen, welche Mengenangaben bei der Oberbegriffsfindung spannend zuzuordnen wären, können diese vor dem Kopieren in die **Kopiervorlage 3** eingetragen werden. Die Kursleitung wählt hier, wie in den bereits vorgefertigten Karten, unterschiedliche Darstellungen der Zahl. Die Zahlen werden als Menge, Ziffer oder Zahlwort notiert. Durch die verschiedenen Zahldarstellungen wird immer wieder auf den Mengenaspekt der Zahl fokussiert (kardinaler Zahlaspekt).

Der Auftrag an die Teilnehmer*innen lautet:

Ziehen Sie immer abwechselnd eine Karte vom Stapel.

Überlegen Sie nach jedem Zug, ob Sie die soeben aufgedeckte Menge mit einer anderen bereits offen liegenden Menge zusammenrechnen könnten.

Ordnen Sie die Menge einer anderen Menge zu, wenn sie zusammengerechnet werden könnten ODER legen Sie die Karte einzeln auf den Tisch, wenn die Mengenbeschreibung zu keiner bereits offenliegenden Menge passt.

Begründen Sie Ihre Wahl. Warum kann man die Mengen zusammenrechnen oder warum eben nicht?

Dann ist die*der nächste Teilnehmer*in an der Reihe. Die Vorgehensweise bleibt immer gleich. Eine Karte wird aufgedeckt und die*der Teilnehmer*in schaut, ob und gegebenenfalls zu welcher anderen Mengenbeschreibung diese Karte passt.

Ein Beispiel sollte vor der eigentlichen Gruppenarbeit mit den Teilnehmer*innen besprochen werden.

BEISPIEL

Beispielhafter Ablauf dieser Gruppenarbeit

Auf dem Tisch liegt bereits ein Kärtchen mit dem Text „*zwei Kuchen*". Anschließend zieht die*der nächste Teilnehmer*in die Menge „*drei Meter*". Nun muss überlegt werden, ob diese Mengen zusammengerechnet werden könnten.

2 Kuchen und 3 Meter sind zusammen 5 …?

Gibt es für beide Mengenbeschreibungen einen gemeinsamen Oberbegriff?

Die*Der nächste Teilnehmer*in aus der Gruppe zieht eine Karte mit der Aufschrift *zwei Meter* und legt diese Karte unter die Karte mit der Aufschrift *drei Meter*, denn das wären zusammen 5 Meter. Die Teilnehmer*innen müssen an dieser Stelle des Kurses die Mengen nicht addieren oder gar umrechnen. Es sollte nur eine Begründung dafür geben werden, warum zwei Mengen zusammengefasst bzw. nicht zusammengefasst werden können.

3 Zentimeter 5 Meter 3 Meter	fünf Häuser 1 Fabrik 7 Garagen

Am Ende des ersten Teils der Übung liegen auf dem Tisch mehrere Kartengruppen. Beim zweiten Teil der Gruppenarbeit sollen die Teilnehmer*innen Oberbegriffe für die verschiedenen Kategorien finden.

Wie könnte der Oberbegriff für diese Mengenangaben lauten? Was haben alle Mengen gemeinsam?

Warum können sie zusammengerechnet werden?

Sollten einige Karten/Begriffe fälschlicherweise zusammengelegt worden sein, wird dies durch oben stehende Fragstellungen nun auffallen.

BEISPIEL

Fortsetzung der Gruppenarbeit

Wenn für zwei Karten der Oberbegriff *Längen* oder *Längeneinheiten* gefunden wurde und noch eine einzelne Karte mit der Aufschrift *drei Zentimeter* vorhanden ist, fällt bei der Suche nach einem Oberbegriff auf, dass *zwei Meter*, *drei Meter* und *drei Zentimeter* einen gleichen Oberbegriff haben. Deshalb können sie zusammengerechnet werden.

Längenangaben	Menschen	auch Längenangabe
zwei Meter drei Meter	fünf Freunde zwei Frauen	drei Zentimeter

Die Kursleitung sollte immer wieder von Gruppe zu Gruppe gehen und dabei bereits analysieren, ob es Schwierigkeiten gibt. Vielleicht gibt es bei bestimmten Mengenangaben oder Oberbegriffen in allen Gruppen ähnliche Probleme.

Im Anschluss an die Gruppenarbeit werden die Ergebnisse mit dem gesamten Kurs diskutiert. Je nach Anzahl der Teilnehmer*innen im Kurs und deren Motivation können entweder alle oder nur einzelne Oberbegriffe und Mengenangaben gemeinsam besprochen und diskutiert werden. Die Gruppen, die besonders gute Ideen produziert haben, sollten ihre Ergebnisse vor dem Kurs präsentieren. Dabei sollten auch Teilnehmer*innen der anderen Gruppen ihre Zuordnung zu bestimmten Oberbegriffen erläutern.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollen im Anschluss an dieses Gespräch ihr Wissen darüber, welche Zahlen zusammengerechnet bzw. unter gleichen Oberbegriffen zusammengefasst werden können, präzisiert haben. Dazu benötigen sie das Wissen um Kriterien, mit welchen sie das Zusammenfassen unter einen Oberbegriff beurteilen und begründen können. Dabei reicht es nicht aus, auf die gleiche Bezeichnung zu achten (*drei Meter* und *zwei Meter*), wie es häufig bei der Bearbeitung von Sach- und Textaufgaben der Fall ist. Es muss intensiver über den Gehalt der Zahl – die Zusammengehörigkeit und den gemeinsamen Oberbegriff – nachgedacht werden. Darüber hinaus können die Teilnehmer*innen nun auch begründen, warum bestimmte Zahlen und Mengenangaben nicht zusammengefasst werden können. Bei vier Elefanten und einem Brot lässt sich zwar sagen, dass es zusammen fünf sind (eine Fünfheit/eine Fünfermenge), jedoch macht das Zusammenfassen beider Mengen wenig Sinn. Denn warum und wofür sollten vier Elefanten und ein Brot zusammengerechnet werden? „Zusammen sind es fünf …“ hat wenig Aussagekraft oder praktische Relevanz. Das Zusammenfassen gelingt hier nur unter der absoluten Abstraktion und Reduzierung auf den Anzahlbegriff („es sind fünf“).

2.3 (Ab-)Zählfehler und Zählprinzipien

EXPLORATION

Für die Teilnehmer*innen dieses Kurses ist es wichtig zu erfahren, welche Hindernisse sie in ihrem mathematischen Lernen behindert haben. Das Wissen um mathematische Hürden ist elementar, denn mit der Aufarbeitung dieser Hürden besteht für die Teilnehmer*innen die Chance, Mathematik verstehen lernen zu können und die Hürden, wenn noch nicht geschehen, zu beseitigen.

Eine basale Hürde kann das Zählen und Abzählen sein. Sicherlich können fast alle Teilnehmer*innen des Kurses heute fehlerfrei zählen und abzählen, jedoch muss das nicht heißen, dass sie dies schon fehlerfrei in der ersten Klasse beherrschten. Sollte dies nicht der Fall gewesen sein, war es für die Teilnehmer*innen schwierig, den nachfolgenden Inhalten des Mathematikunterrichtes zu folgen. Wie sollen das Addieren und Subtrahieren gelingen, wenn das Wissen um die Invarianz der Menge und das Wissen um die anderen sogenannten Zählprinzipien nicht vorliegen?

Der Begriff *Zählen* meint zunächst das Aufsagen der Zahlwortreihe, auch rückwärts und ab einer beliebigen Zahl. Der Begriff *Abzählen* steht für das korrekte Bestimmen der Anzahl der Elemente einer Menge, oft wird aber auch beim Abzählen von *„Zählen“* gesprochen – das wird in diesem Text auch so sein.

Im folgenden Unterrichtskonzept wird das Abzählen näher betrachtet. Dazu werden einerseits die sogenannten Zählprinzipien (die korrekterweise Abzählprinzipien heißen müssten) erschlossen und andererseits mögliche Fehlerquellen beim Abzählen analysiert.

2.3.1 Kursgespräch und Gruppenarbeit (Ab-)Zählfehler und Zählprinzipien

Didaktische Ziele

- verschiedene Abzähltechniken (Antippen, Wegschieben, nur mit den Augen, mit Strukturierung) vergleichen und die eigene Abzähltechnik verbessern
- die wesentlichen Zählprinzipien verstehen und beim Abzählen einhalten

Im Kurs werden drei bis fünf Gruppen gebildet. Die Kursleitung bittet eine der Gruppen an einen Tisch, auf dem eine große (!) Menge Chips oder Steckwürfel liegt.

Nun soll jemand aus der Kleingruppe die Menge abzählen. Günstig ist es, wenn die anderen Gruppen den Zählprozess nicht beobachten können. Die restlichen Teilnehmer*innen könnten kurz den Raum verlassen, der Tisch mit den Chips bzw. Steckwürfeln wird außerhalb der Sichtweite positioniert oder die Gruppe, die gerade zählt, stellt sich in die Sichtachse. Wichtig ist außerdem, dass nur einmal gezählt werden darf und die restlichen Mitglieder der Kleingruppe aufgefordert werden, den Zählprozess genau zu beobachten.

Nun zählt immer ein*e Teilnehmer*in der Kleingruppe die Menge ab, die anderen Teilnehmer*innen der Kleingruppe beobachten währenddessen das Abzählen. Es kann durch Zählfehler dazu kommen, dass unterschiedliche Ergebnisse für dieselbe Menge genannt werden. Das wäre in dieser Situation durchaus erwünscht, denn so kann im Anschluss eine Diskussion im Plenum über Zählfehler oder Probleme im Zählprozess geführt werden. Sollten alle Teilnehmer*innen die gleiche Anzahl ermittelt haben, kann trotzdem besprochen werden, welche Fehlerquellen es bei der Anzahlbestimmung einer sehr großen Menge geben könnte.

Die Kursleitung notiert sich die jeweils ermittelte Menge, sodass die Resultate später miteinander verglichen werden können.

Dieses Vorgehen soll jetzt jede Kleingruppe durchlaufen: Die Gruppe geht an den Tisch mit den Chips bzw. Steckwürfeln, eine*r zählt und die anderen beobachten den Zählprozess, die Kursleitung notiert die ermittelten Anzahlen.

Anschließend werden, nun wieder mit dem kompletten Kurs, die Beobachtungen bezüglich des Zählprozesses verglichen:

*Wie/Mit welcher Zähltechnik haben die verschiedenen Teilnehmer*innen die Menge ausgezählt?*

Wurden die Gegenstände
- *angetippt,*
- *die einzelnen Gegenstände weggeschoben oder*
- *nur mit den Augen gezählt?*

*Welche dieser Zähltechniken scheint den Teilnehmer*innen am genauesten/sichersten/schnellsten?*

Bei welcher Zähltechnik könnten Fehler aufgetreten sein? Warum können dabei Fehler aufgetreten sein?

*Was denken die Teilnehmer*innen: Ist die Anzahl in jedem Fall korrekt bestimmt worden? Woran haben sie dies erkannt?*

Ziel der Fragen ist es, Unterschiede zwischen den Zähltechniken der Teilnehmer*innen (antippen, wegschieben, nur mit den Augen) und mögliche Zählfehler oder Schwierigkeiten beim Abzählen zu analysieren.

Grundlage für eine genaue Analyse möglicher Probleme bei der Anzahlbestimmung können die sogenannten Zählprinzipien sein. Anhand dieser Prinzipien ist es möglich, die wesentlichen Fehlerquellen zu erkennen. Dabei soll es nicht darum gehen, dass die Teilnehmer*innen die Zählprinzipien erklären können. Ziel ist es, dass die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen entlang von Fragen, die sich aus den Zählprinzipien herleiten, jene Missverständnisse erkennen, die zu fehlerhaften Zählergebnissen führten. Es werden jene Zählfehler herausgearbeitet, die die Teilnehmer*innen früher gemacht haben oder u. U. immer noch machen.

DIE SOGENANNTEN ZÄHLPRINZIPIEN

Stabilität der Zahlwortreihe
Die Zahlwortreihe hat eine feste Reihenfolge (…eins, zwei, drei…).

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:
- die Zahlwortreihe wurde nicht korrekt aufgesagt
  - es wurden Zahlen vergessen
  - Zahlen wurden doppelt genannt
  - die Reihenfolge der Zahlworte war durcheinander

Eins-zu-Eins-Zuordnung
Jedem Element wird genau ein Zahlwort zugeordnet, kein Element wird ausgelassen oder doppelt gezählt.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:
- es wurden Elemente doppelt gezählt
- einzelne Elemente wurde nicht gezählt

Kardinalzahlprinzip
Die letztgenannte Zahl bezeichnet die Anzahl der gesamten abgezählten Menge.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:
- Die*Der Teilnehmer*in denkt, die ermittelte Zahl stehe für das letzte Element (der fünfte Finger wird für „die Fünf“ gehalten).

Prinzip der Beliebigkeit der Reihenfolge
Die Reihenfolge, in der die Elemente gezählt werden, ist für das Zählergebnis egal.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:
- Die*Der Teilnehmer*in denkt, dass sich unterschiedliche Zählergebnisse ergeben können, wenn man die Elemente in anderer Reihenfolge zählt.

Invarianz der Menge
Wird kein Element entnommen oder hinzugefügt, muss die Menge gleich groß bleiben; die Anzahl kann sich nicht verändert haben.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:
- Die Anzahl der Elemente einer Menge wird als veränderlich angenommen, wenn sich die Anordnung der Elemente ändert, zum Beispiel durch Auseinanderziehen.

Abstraktionsprinzip
Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d. h. beim Zählen kommt es nicht auf die Art der Objekte an.

Das Abstraktionsprinzip steht im Widerspruch zur Überzeugung, dass nur Dinge, die einen gemeinsamen Oberbegriff haben, zusammengezählt werden können. Die Bildung von Oberbegriffen ist Gegenstand des vorangegangenen Kapitels 2.2.

Dieses Thema – Abstraktionsprinzip vs. Oberbegriffe – eignet sich gut zur Diskussion mit den Teilnehmer*innen. Hier können Überzeugungen argumentativ begründet werden, denn es gibt kein richtig oder falsch. Die Kursleitung macht die Thematisierung des Widerspruches vom Interesse der Teilnehmer*innen und vom Zeitbudget abhängig. Die Erprobung des vorliegenden Unterrichtskonzeptes hat gezeigt, dass diese Thematik von den Teilnehmer*innen als sehr interessant wahrgenommen wurde und sehr motivierend auf die Teilnehmer*innen wirkt.

Die Teilnehmer*innen fühlten sich nun auch in der Mathematik ernst genommen, in dem Fach, das bisher kaum das Gefühl der Selbstwirksamkeit gestärkt hat.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:
- Unterschiedlich farbige oder große Elemente zählt die*der Teilnehmer*in nicht zusammen: es sind 45 (grüne) und/oder 56 (blaue Würfel oder Chips), aber eben nicht 101.

Nach dem Vergleich der höchstwahrscheinlich unterschiedlichen Anzahlen sollen die Teilnehmer*innen überlegen, welche Fehler gemacht worden sein können. Diese möglichen Fehler werden an der Tafel notiert. Die Kursleitung kann, anhand der Zählprinzipien, mögliche Fehlerquellen ergänzen.

Den meisten Menschen sind die Zählprinzipien nicht bekannt und trotzdem wissen sie, wie man richtig zählt. Gibt es jedoch besondere Schwierigkeiten im Rechnen, können nicht verstandene oder nicht beachtete Zählprinzipien Ursache von Problemen im mathematischen Lernprozess (gewesen) sein.

Anschließend oder auch schon während der Fehlersammlung sollten die eigenen Probleme beim Zählen reflektiert werden – egal, ob diese Probleme heute noch bestehen oder evtl. in der Grundschulzeit bestanden haben.

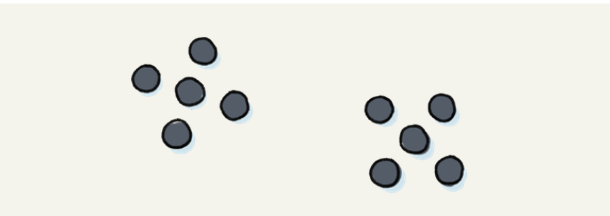
Dazu könnte Folgendes gefragt werden:

Sind Sie beim Zählen größerer Mengen manchmal einfach verzweifelt, weil Sie auf verschiedene Ergebnisse kommen?

Können Sie sich an Fehler beim Zählen oder Schwierigkeiten beim Zählen in Ihrer Kindheit erinnern? Welche Fehler haben Sie schon gemacht / sind Ihnen bereits passiert?

Haben Sie Fehler beim Zählen, z. B. während Ihrer Schulzeit, bei anderen Kindern beobachtet? Welche sind das gewesen?

Zu guter Letzt sollte die korrekte Anzahl an Steckwürfeln/Chips ermittelt werden. Gemeinsam wird überlegt, wie man möglichst genau, sicher und schnell die Anzahl unüberschaubarer Mengen ermitteln kann. Als hilfreich hat sich das Bilden strukturierter Mengen (z. B. Zehnermengen, Fünfer- oder Zweierstrukturen) erwiesen. Durch das Strukturieren kann der Überblick leichter behalten werden und anschließend wird, wie in diesem Beispiel, in Zehnerschritten abgezählt. Die Zehner können z. B. als zwei Fünfer-Würfelbilder gelegt werden, so fallen Zählfehler bei der Anzahlbestimmung schnell auf.



Mehr zur Arbeit mit strukturierten Mengen können Sie im Einleitungsteil des 3. Kapitels, S. 32 f, des DVV-Rahmencurriculum Rechnen nachlesen.

RÜCKSCHAU

In der vorangegangenen Stunde haben die Teilnehmer*innen eigene oder allgemeine Schwierigkeiten beim Erfassen von Mengen analysiert. Es wurde deutlich, dass eine vermeintlich „leichte“ Fähigkeit wie das Zählen manches Hindernis in sich bergen kann.

Die Zahlwortreihe muss sicher beherrscht werden. Zudem darf jedem Element nur genau ein Zahlwort zugeordnet werden. Die letztgenannte Zahl bezeichnet die Gesamtheit der abgezählten Menge, nicht nur das letzte Element. Es ist egal, in welcher Reihenfolge die Elemente gezählt werden. Wenn kein Element hinzugefügt oder weggenommen wird, bleibt die Anzahl gleich.

Große Mengen lassen sich außerdem leichter zählen, wenn sie strukturiert sind. Die Strukturierung der Menge verringert das Risiko, dass Elemente doppelt oder gar nicht gezählt werden.

2.4 Formen der Darstellung und Weitergabe von Zahlen

EXPLORATION

Ziel der folgenden Übungen und der sich jeweils anschließenden Auswertungsgespräche ist eine intensivere Auseinandersetzung mit der Darstellung bzw. Weitergabe von Anzahlen. Historisch wurden Zahlen und Ziffern entwickelt, um Anzahlen zu beschreiben – die Anzahl der Schafe einer Herde oder der Krüge in einem Vorratsraum. So bestand die gleiche Frage damals wie heute: Wie kann eine Anzahl weitergegeben werden? Dabei gibt es die Möglichkeit, dass die Bedeutung einer Zahl (also die mit ihr beschriebene Anzahl) sichtbar bleibt – oder unsichtbar wird. Das meint zunächst, ob eine Zahl mengenhaft oder nicht mengenhaft (als Ziffer oder Zahlwort) dargestellt wird.

Bei der mengenhaften Darstellung wird deutlich, dass Zahlen aus Einern bestehen und jede nachfolgende Zahl immer einen Einer mehr enthält als die vorhergehende Zahl. Bei Ziffern und Zahlwörtern hingegen wird die Anzahl der Einer, d. h. die Mächtigkeit, nicht so ohne Weiteres erkannt. Das Wissen, dass die Ziffer 5 fünf Einer und die Ziffer 6 einen Einer mehr als 5 meint – nämlich sechs Einer – ist fundamental, erschließt sich aber bei nichtmengenhaften Zahldarstellungen nicht. Deshalb soll auch herausgearbeitet werden, dass das Nichtwissen um die Mächtigkeit von Zahlen (der kardinale Zahlbegriff) und die Diskrepanz zwischen abstrakten und mengenhaften Zahldarstellungen Ursache eines erschwerten mathematischen Lernprozesses während der Schulzeit gewesen sein kann.

2.4.1 Partnerübung Weitergabe von Zahlen

Didaktisches Ziel
Notationsformen und andere Möglichkeiten der Darstellung von Zahlen (Schreiben als Zahlwort oder in Ziffernschreibweise, Zeichnen mit Symbolen, Zeigen oder Sprechen) kennen und benutzen

Die visuelle Weitergabe von Zahlen (Schreiben und Zeichnen)

Zuerst sollte der Kurs in Zweiergruppen eingeteilt werden. Die Kursleitung flüstert nun einer Person eine Zahl zu. Sollte dies nicht möglich oder erwünscht sein, kann die Zahl auch auf einem Blatt notiert werden. Nachteilig an der letzteren Vorgehensweise ist jedoch, dass die geschriebene Zahl schon eine Möglichkeit der visuellen Zahlweitergabe darstellt.

Nun wird diese Person dazu aufgefordert, die Zahl auf einer Karteikarte oder einem Zettel zu notieren und anschließend der*dem Übungspartner*in zu überreichen. Wichtig ist der Hinweis, dass die Art der Zahlweitergabe jedes Mal variieren muss. Das fördert die Kreativität und das Nachdenken über Zahlen. Dieses Vorgehen sollte jedes Übungspaar mehrmals durchspielen. Dabei sollten die Rollen wechseln.

Ist die Zahl richtig angekommen?

Folgende Möglichkeiten werden bei der geschriebenen oder gezeichneten Zahl mit großer Wahrscheinlichkeit vorkommen:

Abbildung 2.4-1 Beispiele für Karteikarten visuelle Zahlweitergabe

Haben alle Teilnehmer*innen ihre Zahlen weitergegeben, so sollte in einem Auswertungsgespräch ausgetauscht werden, welche Notationsformen sie gewählt haben.

Ideensammlung
Folgende Fragen regen die Ideensammlung an:

> *Hat jemand eine besonders interessante Form gefunden? Welche der Notationen waren eindeutig und verständlich?*
>
> *Welche Formen der Notation haben verwirrt oder zu Fehlern geführt?*

Die Ergebnisse sollten an der Tafel notiert werden.

Gruppierung
Anschließend werden die Ergebnisse gruppiert und kategorisiert. Dabei können folgende Fragen hilfreich sein:

> *Welche Formen der Zahlnotation sind ähnlich bzw. gehören zusammen?*
>
> *Welche Zahlnotationen passen nicht zusammen?*

Hier sollte insbesondere auf den Unterschied zwischen den abstrakten Notationsformen (Ziffer/Zahlsymbol und Zahlwort) und den Formen, bei denen die Anzahl der Einer erkennbar ist, hingewiesen werden. Die Anzahlhaftigkeit (der kardinale Zahlbegriff) ist für das mathematische Grundverständnis elementar und anhand der heute üblichen Zahldarstellungen mithilfe der arabischen Ziffern ist die Anzahl nicht ablesbar.

Begriffsfindung
Sind die Antworten gruppiert, können Begriffe gefunden werden. Dazu kann gefragt werden:

> *Was haben diese Formen der Verschriftlichung gemeinsam?*
>
> *Was ist bei diesen Zahlen anders als bei den anderen?*

Mögliche Begriffe für die verschiedenen Notationsformen sind:

- die Zahlnotation mit Ziffern
- die Notation als Zahlwort oder
- eine unmittelbar die Anzahl darstellende (kardinale) ikonische bzw. bildliche Darstellung.

Die visuelle Weitergabe von Zahlen (Zeigen)

Diese Übung verläuft ähnlich der oben genannten Übung. Die Teilnehmer*innen können neue Zweierteams bilden und jede*r bekommt anschließend verschiedene Zahlen gesagt oder auf einer Karteikarte notiert.

Nun sind die Teilnehmer*innen dazu angehalten, Ihrer*Ihrem Übungspartner*in die Zahl mitzuteilen, und zwar ohne Stimme (ohne Worte oder Laute), ohne andere Geräusche und ohne die Zahl zu notieren – nur durch Zeigen.

Auch bei diesem Übungsteil sollten die Rollen wechseln und die Teilnehmer*innen sollten dazu angehalten werden, sich immer eine andere Art des Zeigens zu überlegen. Sollte doch auf das Schreiben oder auf Laute zurückgegriffen werden, kann die Kursleitung die Bedingungen auch an der Tafel notieren:

- ohne Geräusche
- nicht aufschreiben

Mögliche Formen des Zeigens einer Zahl können sein:

- Fingermengen
- Winkeralphabet
- mit Händen und Füßen
- Morsezeichen

Im Anschluss an die Übung werden die Möglichkeiten der Zahlweitergabe durch Zeigen gesammelt.

Ideensammlung

> *Hat jemand eine besonders interessante Form des Zeigens gefunden? Welche Form des Zeigens war eindeutig und verständlich?*
>
> *Welche Form des Zeigens hat verwirrt oder zu Fehlern geführt?*

Die Ergebnisse sollten an der Tafel notiert werden. Es sollte deutlich sein, dass auch bei der visuellen Darstellung durch Zeigen kardinale und nichtkardinale Darstellungen möglich sind. Das Winkeralphabet, Morsezeichen und manche Formen der Darstellung mit Händen und Füßen arbeiten nichtkardinal. Bei diesen Darstellungen muss (ebenso wie bei unseren arabischen Zahlsymbolen) die Konvention der Darstellung bekannt sein, um aus den Darstellungen die beschriebene Anzahl ablesen zu können.

Gruppierung
Anschließend werden die Ergebnisse gruppiert und kategorisiert. Dabei helfen folgende Fragen:

Welche Formen des Zeigens einer Zahl waren ähnlich bzw. gehören zusammen?

Welche Formen des Zeigens passen nicht zusammen? Warum passen sie nicht zusammen bzw. sind nicht ähnlich?

Auch in dieser Phase sollten die mengenhaften und nichtmengenhaften Zahlen unterschieden werden.

Bei welchen Formen des Zeigens haben Sie die Anzahl der Einer erkannt?

Bei welchen Formen des Zeigens ist nicht erkennbar, wie viele Einer die Zahl hat?

Begriffsfindung
Sind die Antworten gruppiert, können Begriffe gefunden werden. Dazu kann gefragt werden:

Was haben diese Formen des Zeigens einer Zahl gemeinsam?

Was ist bei dieser Form anders?

2.4.2 Die akustische Weitergabe von Zahlen

Für den letzten Teil der Zweierübung sollte sichergestellt werden, dass sich die Teilnehmer*innen, die nun ihre Zahlen austauschen, nicht sehen können. Dazu könnte eine mobile Wand oder Tafel zwischen die Personen geschoben werden. Möglich wäre auch, dass die Teilnehmer*innen mit dem Rücken zueinander sitzen.

Jetzt erhalten die Teilnehmer*innen wieder Zahlen auf Karteikarten und müssen diese akustisch weitergeben. Es darf nichts notiert oder gezeigt werden.

Auch hier sollten sich die Teilnehmer*innen abwechseln, sodass jede*r mal Sender*in und Empfänger*in ist.

Im Anschluss werden die Möglichkeiten der akustischen Übermittlung von Zahlen nach dem oben bereits beschriebenen Schema gesammelt (Ideensammlung), gruppiert (Gruppierung) und für jede Gruppe ein Begriff (Begriffsfindung) gesucht. Auch hier sind die Formen der *„abstrakten Zahllaute“* und der *„mengenhaften Laute“* zu trennen.

Folgende Formen der akustischen Zahlweitergabe werden bei dieser Übung auftauchen:

- Zahlnamen/-worte
- Klopfzeichen
- Laute und Geräusche (entsprechend der Anzahl)
- Morsezeichen

RÜCKSCHAU

Mit diesen Übungen haben sich alle Teilnehmer*innen nochmals intensiv mit Zahlen, Mengen, Ziffern und Zahlworten und deren Gemeinsamkeiten und Unterschieden auseinandergesetzt. Es gibt wesentliche Unterschiede zwischen den Zahldarstellungen.

Zum Rechnen muss die Mächtigkeit einer Zahl bekannt sein. Die Anzahl ist jedoch bei Ziffern und Zahlworten nicht unmittelbar zu erkennen.

Die Teilnehmer*innen haben sich intensiv mit dem Gehalt einer Zahl beschäftigt, damit was eine Zahl ausmacht, was deren Alleinstellungsmerkmal ist und sie deshalb von den anderen Zahlen unterscheidet.

ENDNOTEN

1 Wird nach 9 + 3 die Aufgabe 3 + 9 erneut berechnet, ist davon auszugehen, dass die Aufgabe ausgezählt wurde. Da viele Zähler*innen nicht wissen, wie leichter gerechnet kann (sonst würden sie es so machen), nennen sie das Auszählen häufig Rechnen. Rechnen, so wie wir es verstehen, meint allerdings nicht nur das Lösen einer Aufgabe, auf welchem Wege auch immer, sondern impliziert ein Wissen um Mengen, Zahlen, Zahlzusammenhänge, Rechenoperationen, den Zahlaufbau und die mathematisch-logische Anwendung dessen. Ist dieses Wissen vorhanden, muss eine Aufgabe auch nicht mehr ausgezählt werden.

2 Ein ordinaler Zahlbegriff ist an sich nicht falsch. Zum Begreifen der Mathematik benötigt man einen ordinalen sowie einen kardinalen Zahlbegriff.

3 Mit dem Begriff „Kapitänsaufgaben“ sind Aufgaben gemeint, die auf den ersten Blick wie normale Textaufgaben aussehen sollen. Sie sind aber aufgrund fehlender Informationen nicht lösbar oder die Antwort ist bereits im Aufgabentext enthalten. Menschen mit Rechenproblemen neigen dazu, die enthaltenen Zahlen „irgendwie“ zu kombinieren und auszurechnen.

4 Der kardinale Zahlaspekt ist nicht an Gegenstände gebunden. Anstatt „acht Kekse“ kann auch abstrakt „es sind acht“ gesagt werden. Zum Thema Abstraktionsprinzip befinden sich Ausführungen im Kapitel 2.3 und die Oberbegriffsbildung wird in Kapitel 2.2 thematisiert.

Anhang Kopiervorlagen

Kopiervorlage 1

Bitte ordnen Sie die Zahlbeispiele den Zahlaspekten zu. Diskutieren Sie anschließend, in welche Kategorie die verwendeten Zahlen Ihrer Meinung nach gehören. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Zahlen zum Messen (Nutzung als Maßzahl) „5 Kilometer noch…“ „… dafür braucht man 500 Gramm Butter!“	**Zahlen zum Rechnen** (Nutzung als Rechenzahl) „Wenn du mir noch 2 € gibst, haben wir insgesamt 10 € …“ „4 + 5 sind 9“	**Zahlen, um zu beantworten, „wie viel“ von etwas vorhanden ist** (Nutzung als Kardinalzahl) „Ich habe zwei Brüder …“
Zahlen als Code oder Schlüssel von/für etwas (Nutzung zur Codierung) „14473 ist die Postleitzahl von …“	**Zahlen zum Angeben einer Rang- /Reihenfolge** (Nutzung als Ordnungszahl) „Sie hat den 3. Platz belegt.“	**Andere Zahlen …**

Kopiervorlage 2

In die leeren Felder können Sie weitere eigene oder in der Gruppe gefundene Beispiele eintragen.

Auf diesem Aufgabenblatt finden Sie einige Beispiele für die unterschiedliche Nutzung von Zahlen.

- Schneiden Sie die Beispiele aus.
- Ordnen Sie anschließend die Aussagen einer Kategorie zu.
- Begründen Sie ihre Entscheidung.

„Das Autokennzeichen von Gökhan lautet: K-G 1986“	„Die PIN meiner Bankkarte verrate ich dir nicht.“	„Von zwölf Teilnehmer*innen fehlen heute vier.“	„Wie viele sind wir denn zusammen, wenn beide Familien kommen?“
„Das Fahrrad darf höchstens 12 Kilogramm schwer sein.“	„Der Einkauf kostet über 25 €.“	„Der Kurs findet immer von 10 bis 16 Uhr statt.“	„Die Rollschuhe sind gebraucht und deshalb günstiger.“
„Ich habe gestern nur zwei Gläser Wasser getrunken.“	Ich war schon sieben Mal in diesem Kino“	„Ich bin das 4. Kind meiner Eltern.“	„Das habe ich dir schon hundertmal gesagt.“
Nadine und Henni heiraten am 07.05.2020.	„Bringst du bitte noch 5 Zwiebeln und eine Gurke mit?“	„Lucia ist meistens als erste fertig.“	Wollen wir Telefonnummern tauschen?

Kopiervorlage 3

3 Zentimeter	drei Meter
zehn Stunden	fünf Häuser
fünf Freunde	sieben Garagen
eine Fabrik	zehn Kanister

c c c	ein Einer
a a a	zwei Meter
9 Gramm	zwei Zweier
zwei Flaschen	2 Frauen

ein Brot	sechs Brötchen
4 Elefanten	ein Zehner
ein Freund	

Einfach lernen.
Die DVV-Rahmencurricula

www.grundbildung.de

Rechnen
lernen
in der vhs

3<5

Stimmt
das?

vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

AlphaDekade 2016 – 2026

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

MENGEN UND ZAHLEN VERÄNDERN

3

3 MENGEN UND ZAHLEN VERÄNDERN

Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- Verständnis der Rechenoperationen Addition und Subtraktion anhand von Mengenhandlungen aufbauen/festigen
- Verständnis von Gleichungen (Operationszeichen und Gleichheitszeichen) durch Übersetzung von Rechengeschichte oder Mengenhandlung in die Symbolschreibweise (und umgekehrt) aufbauen/festigen
- Verständnis für Gesetzmäßigkeiten und Rechenregeln zu Addition und Subtraktion aufbauen/festigen

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Einsicht in die Invarianz von Mengen (Eine Menge bleibt gleich groß, wenn kein Element entnommen oder hinzugefügt wird.)
- Ziffern schreiben
- Zahlwortreihe vorwärts bis mindestens 10

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Mengen und Zahlen können verändert werden. Dies ist den Teilnehmer*innen des Kurses bereits bekannt, denn wir lösen viele Additions- und Subtraktionsaufgaben in unserem Alltag, ohne dass es uns in jedem Moment bewusst ist. Schwierigkeiten mit dem Rechnen entstehen meist dadurch, dass die Mengen- und Zahlenebene nicht (richtig) zusammengedacht werden. Wenn unbekannt ist, dass Gleichungen in Mengenhandlungen übersetzt werden können – und umgekehrt –, wird das Addieren und Subtrahieren häufig nur als ein Hoch- und Runterzählen an einer Zahlenreihe verstanden.

BEISPIEL

Die Gleichung 2 + 3 = ? beschreibt auf der Mengenebene entweder,

- dass zu einer Zweiermenge eine Dreiermenge hinzugefügt wird oder
- dass eine Zweier- und eine Dreiermenge zusammengeschoben werden oder
- dass eine Zweier- und eine Dreiermenge zusammengedacht werden.

In allen drei Fällen steht die Frage, wie viele es insgesamt sind.

Auch bei der Subtraktion gibt es eine Frage, die durch das Lösen der Aufgabe beantwortet wird: *Wie viele sind übrig?* Wenn im eben genannten Beispiel 2 + 3 = 5 von der Fünf wieder drei weggenommen werden, bleibt zwingend die Zweiermenge übrig (5 – 3 = 2). Sollte hingegen die Dreiermenge weggeschoben oder auch nur weggedacht werden, bleiben zwei übrig (5 – 3 = 2).

BEISPIELE
für Mengenhandlungen, die in Gleichungen übersetzt werden können (und umgekehrt):

- Im Obstkorb liegen zwei Bananen, es werden noch drei Bananen dazugelegt. Jetzt sind es zusammen fünf Bananen.
  2 Bananen + 3 Bananen = 5 Bananen
- Auf dem Parkplatz stehen fünf rote und drei grüne Autos. Insgesamt stehen acht Autos auf dem Parkplatz.
  5 rote Autos + 3 grüne Autos = 8 Autos
- Im Einkaufswagen befinden sich bereits einige Artikel. Dann werden jedoch drei Artikel davon wieder in das Regal gestellt, weil das Geld nicht für alle Artikel reichen würde. Es reicht nur noch für die Butter und das Brot. Wie viele Artikel lagen vorher im Einkaufswagen?
  5 Artikel – 3 Artikel = 2 Artikel
- Mary schaut in ihren Geldbeutel. Dort ist nur noch ein Zwei-Euro-Stück. Sie weiß, dass zu Hause noch 8 € auf dem Tisch liegen. Insgesamt hat Mary 10 €.
  2 € + 8 € = 10 €

Ein weiteres Hindernis im mathematischen Lernen sind Unkenntnis bzw. ein Fehlverständnis der Operationszeichen und des Gleichheitszeichens. Wenn die Teilnehmer*innen nicht wissen, was Plus-, Minus- und Gleichheitszeichen bedeuten, können sie entsprechende Aufgaben nicht verständig lösen. Ein großes Problem des heutigen Schulunterrichtes ist, dass Kinder bereits ab dem ersten Schuljahr mit dem Plus-, dem Minus- und dem Gleichheitszeichen konfrontiert werden, aber nur wenigen Kindern wird während ihrer Grundschulzeit erklärt, was diese Symbole genau bedeuten. Erst in der siebten Klasse, beim Umformen von Gleichungen und Termen, kommt dem Gleichheitszeichen gebührende Aufmerksamkeit zu. Nun wird besprochen, dass links und rechts dieses Zeichens gleich viel sein soll und dass es deshalb diesen Namen trägt („ist gleich").

Ziel der nachfolgenden Stunden ist es, dass sich die Teilnehmer*innen darin üben, Gleichungen in Mengenhandlungen und umgekehrt Mengenhandlungen in Gleichungen zu übersetzen. Gleichungen sollen für alle Kursteilnehmer*innen nicht mehr eine bloße Ansammlung mathematischer Symbole darstellen, sondern sie werden diese Zeichen übersetzen und verstehen können.

Anschließend werden die wichtigsten Rechenregeln zur Addition und Subtraktion besprochen. Ziel ist dabei nicht, die Definition von Begriffen oder Rechenregeln auswendig zu wissen, sondern das Erkennen und Bewusstmachen von grundlegenden Gesetzmäßigkeiten.

Weiterhin notwendig ist das Wissen um Gesamt- und Teilmengen bei Addition und Subtraktion. Dieses Wissen wird zu einem späteren Zeitpunkt im Kursverlauf zur Nutzung von Zahlzerlegungen und zur Fähigkeit, Gleichungen und Ungleichungen zu lösen, ausgearbeitet. Den Teilnehmer*innen sollte jedoch bereits in den folgenden Kapiteln bewusst werden, dass bei der Addition die Summe immer mindestens genauso groß wie oder größer als der größte Summand sein muss. Bei der Addition werden immer mindestens zwei Teilmengen zu einer Gesamtmenge zusammengefasst. Anders bei der Subtraktion. Hier wird aus der Gesamtmenge ein Teil entnommen und der andere Teil der Menge bleibt übrig. Deshalb muss bei der Subtraktion die Gesamtmenge die Menge sein, von der höchstens der gleich hohe Wert entnommen werden kann. Das Wissen um die Zusammenhänge von Gesamt- und Teilmengen hilft nicht nur beim Lösen einfacher Gleichungen, sondern wird die Teilnehmer*innen gleichzeitig auch in die Lage versetzen, Platzhalteraufgaben zu verstehen und zu lösen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

In der Regel ist bereits bekannt, dass beim Addieren die Reihenfolge der Summanden unerheblich ist. Dies ist allerdings nicht ganz korrekt. Für das Resultat der Aufgabe 2 + 3 = ? ist es egal, ob 2 + 3 oder 3 + 2 gerechnet wird. Es sind insgesamt fünf. Für die Übersetzung einer Gleichung in eine Mengenhandlung – und umgekehrt – ist es jedoch wichtig, ob erst zwei oder erst drei da gewesen sind.

Noch größere Bedeutung erlangt die Reihenfolge der Summanden beim Lösen von Platzhalteraufgaben (__ + 3 = 5). Manche Erwachsene und Kinder empfinden Platzhalteraufgaben, im Vergleich zu anderen Gleichungen, als deutlich schwieriger zu lösen. Auch hier liegt die Ursache bei der mangelnden Verknüpfung von Mengen- und Zahlenebene. Wenn aber bekannt ist, dass die Gleichung __ + 3 = 5 beschreibt, dass zu einer Menge drei hinzugekommen sind (+ 3), es jetzt fünf sind (= 5) und sich die Frage stellt, wie viele es vorher waren, wäre die Aufgabe für viele Menschen leicht zu lösen. Kompliziert sind Platzhalteraufgaben vor allem, wenn nicht bekannt ist, dass Gleichungen Mengenhandlungen beschreiben können.

Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang, sobald bei Platzhalteraufgaben größere Zahlen im Spiel sind. Es braucht kein Auswendiglernen von Rechenregeln, wenn bekannt ist, dass bei ? + 234 = 534 zu einer unbekannten Menge 234 hinzugefügt wurden und es dann insgesamt 534 sind. Wer die Mengenhandlung zu dieser Gleichung beschreiben kann, für den ist es weniger schwer zu erkennen, dass die Anfangsmenge gefunden werden kann, indem 234 wieder von 534 weggenommen werden.

BEISPIEL

Platzhalteraufgaben: Zusammenhang von Addition und Subtraktion

300 + 234 = 534 denn 534 – 234 = **300**

Bezüglich der Subtraktion sollten die unterschiedlichen Funktionen des Minuenden (der links vom Minuszeichen stehenden Zahl, die die Ausgangsmenge oder Gesamtmenge beschreibt) und des Subtrahenden (der rechts vom Minuszeichen stehenden Zahl, die die entnommene Teilmenge beschreibt) sicher erfasst worden sein. Wenn Teilnehmer*innen bei der Gleichung 3 – 5 = __ kein Problem[1] auffällt, liegt das nicht daran, dass sie nicht wissen, dass fünf mehr sind als drei. Das fehlende Problembewusstsein kann einen Hinweis darauf geben, dass der Aufbau einer Subtraktionsgleichung nicht vollends verstanden ist. Die Bedeutung und Rolle des Minuenden und des Subtrahenden müssen exakt herausgearbeitet werden, bevor thematisch weitergearbeitet werden kann.

Ein weiterer Fehlschluss kann sein, dass die Gesamtmenge bei der Addition *immer hinten* und bei der Subtraktion *immer vorne* steht. Dieser Fehlschluss sollte, wenn bei Teilnehmer*innen so vorhanden, besprochen werden.

BEISPIELE

Die Gesamtmenge steht bei der Addition *nicht immer hinten* und bei der Subtraktion *nicht immer vorne*.

5 = 3 + 2 2 + 3 = 6 – 1 4 = 6 – 2

Wichtig ist es, bei den Teilnehmer*innen ein übertragbares Wissen um Mengenhandlungen bei Addition und Subtraktion zu schaffen, sodass sie erkennen können, welche die Gesamt- und welche die Teilmengen sind.

Das Wissen um das korrekte Vertauschen der Glieder in Additions- und Subtraktionsgleichungen sollte so sicher sein, dass die Teilnehmer*innen nicht glauben, dass alle Zahlen beliebig vertauscht werden können. Beim Vertauschen von Zahlen in Gleichungen muss immer das Operationszeichen (Rechenzeichen) mitgedacht werden.

BEISPIEL

für das Vertauschen von Zahlen und deren Vorzeichen in Additions- und Subtraktionsgleichungen

(+) 5 + 6 – 3 ≠ (+) 5 + 3 – 6

Richtig wäre z. B.

(+) 5 + 6 – 3 = (+) 6 + 5 – 3

(+) 5 + 6 – 3 = (+) 6 – 3 + 5

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Um Veränderungen bei Zahlen und Mengen in Gleichungen überführen zu können, muss bei den Teilnehmer*innen der kardinale Zahlbegriff vorhanden sein. Das heißt, es sollte bekannt sein, dass Zahlen die Anzahl einer Menge angeben können.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn

- Stufe 1 – Bedeutung der Symbolisierung, S. 24 f.
- Stufe 1 – Was ist Addieren? Was ist Subtrahieren? Wie hängen sie zusammen?, S. 26 ff.

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

Für die folgenden vier Unterrichtssequenzen werden für je zwei Kursteilnehmer*innen zehn Gegenstände (beispielsweise Stifte, Kreide, Büroklammern, Besteck, Geschirr, Flaschen, Schirme o. Ä.) benötigt.

3.1 Addition

Didaktische Ziele

- Operationsverständnis der Addition anhand von Mengenhandlungen aufbauen/festigen (Eine Menge kommt zu einer anderen Menge hinzu oder es werden zwei Mengen zusammengeschoben.)
- Gesetzmäßigkeiten der Addition erkunden
- Mengenhandlungen versprachlichen und in Additionsgleichungen übersetzen (und umgekehrt)
- Begriffe *Summand* und *Summe* kennen und benutzen

EXPLORATION

Mit dem folgenden Gespräch und der sich anschließenden Partnerübung soll bei den Teilnehmer*innen das Operationsverständnis der Addition gefördert werden. Es soll erarbeitet werden, dass bei der Addition entweder eine Menge zu einer anderen Menge hinzukommt oder dass zwei Mengen zusammengeschoben (bzw. zusammengedacht) werden können. Aus mindestens zwei Teilmengen wird eine Gesamtmenge gebildet. Dieses mengenhafte und dynamische Operationsverständnis ist Grundlage dafür, dass die Teilnehmer*innen Gleichungen verstehen können. Wenn sie wissen, was Gleichungen und die dazugehörigen Operationszeichen eigentlich beschreiben, können sie Rechenaufgaben verständig lösen.

Das Kursgespräch *Mengenhandlung Addition* soll einerseits eine Anleitung für die nachfolgenden Aufgaben (s. Abschnitt 3.1.2) darstellen, andererseits aber auch erste Erkenntnisse bezüglich der Operationslogik hervorbringen.

Zu den wesentlichen Erkenntnissen gehört, dass das Pluszeichen immer bedeutet, dass entweder zur davorstehenden Menge eine andere Menge hinzukommt und dass diese Mengen zu einer Gesamtmenge vereint werden oder dass zwei Mengen zu einer Gesamtmenge vereint werden.

Während der sich anschließenden Partnerübung haben die Teilnehmer*innen dann die Möglichkeit, dieses theoretische Wissen aus dem Kursgespräch zu erproben und eventuell aufkommende Fragen zu klären. Bei den Aufgaben werden die Teilnehmer*innen Gelegenheit erhalten, selbstständig Mengenhandlungen in Gleichungen zu übersetzen und umgekehrt.

3.1.1 Kursgespräch Mengenhandlung Addition

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen dazu auf, genau zu beobachten, was gleich passiert. Anschließend sollen die Teilnehmer*innen die Handlung beschreiben. Jetzt vollzieht die Kursleitung eine additive Mengenhandlung. Es könnten beispielsweise zu drei Stiften, die sich bereits auf dem Tisch befinden, noch zwei Stifte hinzugelegt werden.[2] Eine Variation der Mengenhandlung ist: Die Kursleitung bittet einige Teilnehmer*innen, sich zu anderen Teilnehmer*innen dazuzusetzen.

Es ist gut, eine Situation zu wählen, bei der sich die Summanden unterscheiden. So können die verschiedenen Funktionen des ersten und zweiten Summanden später leichter herausgearbeitet werden. Der Fokus dieser Aufgabe liegt auf der Handlung und nicht auf der Ergebnisfindung. Viele Teilnehmer*innen werden es gewohnt sein, nur das Ergebnis zu benennen. Um in jeder Situation verständig rechnen zu können, kommt es aber darauf an, benennen zu können, welche Ausgangsmengen vorliegen, welche Handlung mit diesen Mengen vollzogen und welche Frage gestellt wird.

Nachdem die Kursleitung eine Mengenhandlung vor den Teilnehmer*innen vollzogen hat, werden die Teilnehmer*innen dazu aufgefordert zu beschreiben, was die Kursleitung gerade getan hat.

Sollte jemand bereits vorgreifen und äußern, dass es sich hier um *Plus* bzw. *Addition* handelt oder bereits äußern, um welche Gleichung es sich genau handelt, sollte die Kursleitung diese Idee aufgreifen und die anderen Teilnehmer*innen fragen, woran das erkannt werden könnte.

Woher wusste Herr/Frau/Name …, dass es eine Plusaufgabe ist?

Anschließend können mit den Teilnehmer*innen trotzdem die unter Punkt 2 der Kurzanleitung genannten Fragen besprochen werden (am Ende dieser Unterrichtssequenz).

Das Gleichheitszeichen kann, aber muss an dieser Stelle des Kurses noch nicht thematisiert werden. Wenn der Gehalt des Gleichheitszeichens Thema wird, ist es wichtig, dass es nicht nur ein Ergebniszeichen ist, sondern genau das bezeichnet, was wortwörtlich abgebildet ist: ist gleich. Damit ist gemeint: Das auf der linken Seite ist mathematisch gleich dem auf der rechten Seite. Konkreter: Der auf der linken Seite versammelte Zahlenwert ist gleich dem auf der rechten Seite versammelten Zahlenwert. Konkret umgemünzt für unsere Situation: Es wird die Menge gesucht, die gleich viel ist wie die aus der Handlung entstandene Menge.

BEISPIEL
zur Versprachlichung einer additiven Mengenhandlung

2 + 3	=	5
„Wenn zu einer Zweiermenge drei hinzu kommen, …“	„… sind es gleich viel wie …“	„… fünf.“

Wenn nun detaillierter über Gleichungen gesprochen werden soll, benötigen die Teilnehmer*innen zur Kommunikation auch die Bezeichnungen der Glieder einer Additionsgleichung. Die Kursleitung bespricht dazu folgendes Tafelbild mit den Teilnehmer*innen. Das Tafelbild sollte auch für die darauf folgenden Unterrichtssequenzen gut sichtbar im Raum platziert werden. Ziel ist es, sich mithilfe der Begrifflichkeiten ohne Missverständnisse über Gleichungen austauschen zu können. Die Teilnehmer*innen müssen die Begriffe nicht auswendig lernen, denn sie haben keine Praxisrelevanz.

BEISPIEL
Die Begrifflichkeiten einer Additionsgleichung

5 + 3	=	8
Summand + Summand	=	Summe

Bestehen noch sehr große Unsicherheiten im Kurs, kann die Kursleitung oder aber auch ein*e Teilnehmer*in weitere Mengenhandlungen vorspielen. Dabei sollten immer wieder verschiedene Gegenstände genutzt werden, weil so deutlich wird, dass Zahlen verschiedenste Mengen repräsentieren können. Das Thema Oberbegriffe kann an diesem Punkt auch wieder auftauchen. Wenn sich die Kursleitung beispielsweise zu zwei Taschen setzt. Dann sind es zusammen drei …?

KURZANLEITUNG

- Mengenhandlung vorspielen
- Teilnehmer*innen beschreiben lassen, was die Kursleitung gerade getan hat. Folgende Fragen sollen den Erkenntnisprozess fördern:

Was habe ich als Erstes/Zweites/danach getan?
Hat das etwas mit Mathematik zu tun? Was hat das mit Mathematik zu tun?
Was war an dieser Handlung Mathematik/mathematisch?
Welche Menge ist zuerst da gewesen?
Welche Menge ist hinzugekommen?
Wie viele waren es dann?
Wie viele sind es zum Schluss gewesen?

- Nun wird die Mengenhandlung in eine Gleichung überführt. Dabei helfen folgende Fragen:

Wie kann man das, was Sie eben beschrieben haben, kurz aufschreiben?
Gibt es eine Möglichkeit, das noch kürzer aufzuschreiben?
Kennen Sie Zeichen und Symbole, die das Gleiche bedeuten/aussagen?

Am Ende der Aufgabe sollte eine Gleichung stehen, die genau das beschreibt, was die Kursleitung zu Beginn der Stunde vorgespielt hat.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Für eine Addition braucht es mindestens zwei Teilmengen.
- Entweder gibt der erste Summand die Menge an, zu der eine zweite Menge (2. Summand) hinzukommt oder beide Summanden geben die Mengen an, die zusammengefügt oder auch nur zusammengedacht werden.

3.1.2 Partnerübung Mengenhandlung Addition

EXPLORATION

Die folgenden Aufgaben dienen dazu, alle Teilnehmer*-innen Sicherheit darin gewinnen zu lassen, Mengenhandlungen in Gleichungen zu überführen und umgekehrt. Dazu erhalten die Teilnehmer*innen kopierte Karten mit verschiedenen Additionsgleichungen. Gleichungen können in Mengenhandlungen übersetzt werden (und umgekehrt). Diese werden die Teilnehmer*innen in eine Mengenhandlung übersetzen und sich gegenseitig vorspielen. Durch das Erkennen von Zusammenhängen zwischen Gleichung und Mengenhandlung sollen Gleichungen für die Teilnehmer*innen keine unlösbaren und unverständlichen Ansammlungen von Zeichen und Ziffern mehr sein. Mengenhandlungen sollen in einer abstrakten Form – der Gleichung – notiert werden. Dabei soll sich der Mehrwert durch die Nutzung von Gleichungen bzw. Rechenaufgaben für die Teilnehmer*innen erschließen.

Die Kursleitung hat während der Durchführung die Möglichkeit, herauszufinden, ob wirklich alle Teilnehmer*innen das theoretische Wissen aus dem Kursgespräch aufgenommen haben und sicher im Überführen von Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt sind.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Vier wichtige Aspekte sollen im Rahmen der Aufgaben herausgearbeitet werden:

1. Diejenigen Teilnehmer*innen, die eine Aufgabe vorspielen, erhalten dazu eine Gleichung. Sie müssen, um eine Handlung vorspielen zu können, eine vorgegebene Gleichung in eine Mengenhandlung überführen.

   Gleichung → Mengenhandlung

   Die*Der Partner*in erbringt die entgegengesetzte Denkleistung und übersetzt die Mengenhandlung in eine Gleichung.

   Mengenhandlung → Gleichung

   Dieser doppelte Blick auf Mengenhandlungen und Gleichungen vertieft das Verständnis für die Operationslogik weiter.

2. Zwei der vorgegebenen Gleichungen enthalten eine Null. Bei diesen Aufgaben wird erstmals die Rolle der Null in Gleichungen thematisiert. Die Kursleitung beobachtet, wie die Teilnehmer*innen Mengenhandlungen vorspielen, bei denen entweder zu einer Menge nichts hinzukommt oder zu einer leeren Menge eine andere Menge hinzugefügt wird.

3. Einige Gleichungen enthalten einen Tausch der Summanden. Bei der Beschäftigung mit der Dynamik einer Rechenoperation ist es wesentlich, welche Menge zuerst da gewesen ist (1. Summand) und welche Menge zu dieser Anfangsmenge hinzukommt (2. Summand). Wird die Mengenhandlung in der Art, dass zwei Mengen gleichwertig zusammengeführt werden, vorgespielt, unterscheidet sich die Rolle des ersten Summanden nicht von der Rolle des zweiten Summanden. In beiden Fällen wird deutlich, dass die Summe bei identischen Summanden gleich bleibt.

4. Abwechslung kann durch einen Tausch der Partner*innen nach jeder Gleichung oder dadurch erreicht werden, dass andere Materialien zum Vorspielen der Mengenhandlung verwendet werden. Es ist wichtig, dass die Teilnehmer*innen viele Mengenhandlungen vorspielen und in Gleichungen übersetzen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass nach dem korrekten Vorspielen von zwei oder drei Gleichungen plötzlich auch noch grundlegende Fehlannahmen bei jemandem zutage treten können. Alle Gleichungen auf der Kopiervorlage enthalten unterschiedliche Aspekte, die erst nacheinander in verschiedenen Gleichungen thematisiert werden können und sollten.

Die Kursleitung fertigt für jede Gruppe à zwei Teilnehmer*innen eine Kopie der **Kopiervorlage 1** an und schneidet die abgebildeten Karten aus.

KOPIERVORLAGE 1

Die Karten sollten zu Beginn verdeckt vor den Tandems abgelegt werden. Nun nimmt Person A verdeckt einen Gleichungszettel, ohne dass Person B diesen lesen kann. Person A überlegt sich eine passende Mengenhandlung und spielt diese B vor. Ziel ist es, dass B herausfindet, welche Gleichung zur vorgespielten Mengenhandlung passt. Die Kursleitung kann die Teilnehmer*innen dazu anhalten, nach jeder Gleichung andere Materialien zu verwenden. Mögliche Materialien für die Handlung wären: Stifte, Flaschen, Büroklammern, Taschentücher, Steckwürfel, Besteck, Mobiltelefone, Kreide oder Tafelstifte. Vielleicht verlost die Kursleitung auch einen Schokoriegel für die schönste, lustigste oder kreativste Mengenhandlung. Die Nutzung diverser Materialien wird interessante Fragen bezüglich der Oberbegriffsbildung aufwerfen. Die Teilnehmer*innen werden überlegen, ob sie zum Vorspielen einer Gleichung auch unterschiedliche Dinge zusammenrechnen können, z. B. ein Telefon und einen Bleistift.

Als Zwischenschritt sollten die Teilnehmer*innen, die sich die Handlung angeschaut haben, immer zuerst die soeben vorgespielte Handlung beschreiben. Dadurch erhöht sich die Konzentration und die Teilnehmer*innen können länger und intensiver über den Inhalt der vorgespielten Mengenhandlung nachdenken. Es sollte erzählt werden, welche Mengen eine Rolle spielten, was mit diesen Mengen passierte und welche Situation nach der Mengenhandlung vorliegt. Erst dann sollte gesagt werden, um welche Gleichung es sich handelt.

BEISPIEL

für die Beschreibung einer Mengenhandlung

Erst lagen 2 Büroklammern auf dem Tisch. Dann haben Sie vier und noch einmal drei Büroklammern dazugelegt. Jetzt liegen hier insgesamt neun Büroklammern.

Die Gleichung heißt $2 + 4 + 3 = 9$.

Die Kursleitung beobachtet, ob bei manchen Teilnehmer*innen interessante Fehlvorstellungen bezüglich der Operationslogik der Addition vorhanden sind. Diese können aufgegriffen und anschließend im Plenum diskutiert werden.

Eine Besonderheit kommt häufig bei Menschen vor, die alle Aufgaben auszählen (müssen): Dies kann dadurch offenbar werden, dass die*der Teilnehmer*in alle Mengenhandlungen ausschließlich in Einerschritten vollzieht.

Ein Beispiel: Es soll die Gleichung $2 + 4 + 3 = 9$ in eine Mengenhandlung übersetzt werden. Anstatt aber zu den zwei Büroklammern erst vier und dann noch einmal drei Büroklammern zu legen, werden alle Klammern einzeln zur Zweiermenge gelegt. Dies hat zur Folge, dass die*der Partner*in nicht weiß, welche Aufgabe vorgespielt wurde. Sollte ein*e Teilnehmer*in nur in Einerschritten handeln, greifen Sie dies auf. Die Kursleitung könnte fragen:

Welche Gleichung passt zu dieser Handlung?

Die Gleichung, die zu einer solchen Handlung passt, lautet

$2 + (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 9$.

Nach der Beschreibung der Handlung kann die*der vorspielende Teilnehmer*in entweder zustimmen oder die Mengenhandlung erneut vorspielen. Wenn die Gleichung nicht korrekt erfasst wird, sollte noch nicht aufgelöst werden, um welche Gleichung es sich handelt. Oft fällt den Teilnehmer*innen an diesem Punkt bereits selbst der Fehler auf und sie korrigieren ihn. Deshalb gibt die Kursleitung allen die Chance, die Handlung – wenn nötig – auch mehrfach vorzuspielen bzw. sich vorspielen zu lassen. In den allermeisten Fällen kommen die Teilnehmer*innen schließlich zur richtigen Lösung, ohne dass Erklärungen von außen nötig sind.

Sobald die erste Gleichung richtig benannt wurde, tauschen die Partner*innen ihre Rollen. Es wird eine neue Gleichungskarte gezogen und diese Gleichung mit einer Mengenhandlung dargestellt.

Eine Variation der Aufgabe wäre es, die Gleichungen mithilfe von Rechengeschichten zu beschreiben. Die anderen sind anschließend aufgefordert, die entsprechende Gleichung zu benennen.

BEISPIELE
für Rechengeschichten zur Aufgabe
2 + 4 + 3 = 9

- Auf einer Regenrinne sitzen zwei Spatzen. Nach ein paar Minuten setzen sich noch vier Spatzen dazu. Kurz darauf kommt eine Dreiergruppe Spatzen und setzt sich auch noch auf die Regenrinne.
- Anna arbeitet viel. Erst arbeitet sie zwei Stunden an einem wichtigen Brief. Dann holt sie sich einen Kaffee und setzt sich wieder an ihren Arbeitsplatz. Dort bleibt sie auch für weitere vier Stunden sitzen. Nach einer Mittagspause arbeitet sie noch einmal drei Stunden, bevor sie nach Hause geht.
- René sucht Zahnstocher. Er findet im Schubfach zwei, im Hängeschrank vier und drei weitere Zahnstocher im Regal bei den Tassen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Additionsgleichungen können in Mengenhandlungen und Mengenhandlungen in Additionsgleichungen überführt werden.
- Zudem sollte deutlich geworden sein, dass die Addition Veränderungen von Mengen und Zahlen beschreiben kann. Die Aufgaben, bei denen nur die Summanden vertauscht wurden, die Gesamtmenge aber gleich blieb, sind dazu geeignet, den Teilnehmer*innen den Unterschied zwischen erstem und zweitem Summanden zu verdeutlichen.

3.2 Subtraktion

Didaktische Ziele

- Operationsverständnis der Subtraktion anhand von Mengenhandlungen aufbauen/festigen (Aus einer vorhandenen Menge wird eine Teilmenge entnommen.)
- Gesetzmäßigkeiten der Subtraktion erkunden
- Mengenhandlungen versprachlichen und als Subtraktionsgleichungen anschreiben (und umgekehrt)
- Begriffe *Minuend, Subtrahend* und *Differenz* kennen und benutzen

EXPLORATION

Auch in der sich anschließenden Unterrichtssequenz *Mengenhandlung Subtraktion* werden die Teilnehmer*innen Gleichungen in Mengenhandlungen und umgekehrt übersetzen. Allerdings weist die Subtraktion gegenüber der Addition noch einige Besonderheiten auf. Addition und Subtraktion beschreiben unterschiedliche Mengenhandlungen. Daraus ergeben sich folgende Besonderheiten der Subtraktion im Vergleich zur Addition:

- Minuend und Subtrahend können nicht vertauscht werden.
- Bei der Subtraktion ist zu Beginn eine Menge vorhanden. Aus dieser Anfangsmenge wird ein Teil entnommen. Eine Teilmenge kann auch weggedacht werden, ohne dass sie tatsächlich der Gesamtmenge entnommen wird. Ein Beispiel wäre, wenn 10 € auf dem Tisch liegen und überlegt wird, wie viel Geld noch übrig ist, wenn gleich 3 € für den Kaffee bezahlt werden.
- Nach Abschluss der Mengenhandlung bleibt der andere Teil der Ausgangsmenge übrig.
- Es wird die Menge gesucht, die nach Entnahme der Teilmenge übrig bleibt.

Die Subtraktion zu verstehen fällt vielen Lernenden schwerer als die Addition. Ein häufiger Fehler ist, dass bei der Übersetzung einer subtraktiven Mengenhandlung in eine Gleichung die anfänglich da gewesene Menge keine Beachtung in der Gleichung findet. Dies kann sich durch diverse Fehler zeigen. Diese Fehlinterpretationen werden in dem sich an diese Exploration anschließenden Exkurs näher erläutert.

Mit dem Kursgespräch zur Subtraktion soll das dynamische Verständnis der Rechenoperation gefördert werden. Darüber hinaus dient es dazu zu erfahren, dass bei der Subtraktion im Gegensatz zur Addition aus einer Menge eine Teilmenge entnommen wird und demzufolge die andere Teilmenge übrig bleiben muss. Die Betrachtung des dynamischen Aspektes der Subtraktion vereinfacht das Lösen von Gleichungen. Nur wenn die Teilnehmer*innen wissen, was eine Subtraktionsgleichung beschreiben kann, ist die Lösung nachvollziehbar und kann von ihnen erläutert werden.

Im Gespräch sollen die grundlegenden Erkenntnisse zur Subtraktion gewonnen werden. Diese sind:

- Der Minuend (die Zahl links vom (ersten) Minuszeichen) gibt die Anfangsmenge an.
- Der Subtrahend (die Zahl rechts vom Minuszeichen) gibt an, wie viel von der Anfangsmenge – dem Minuend – weggenommen beziehungsweise weggedacht wird.
- Die Subtraktion fragt danach, wie viel nach der Entnahme einer Teilmenge übrig bleibt – fragt also nach der Differenz.
- Minuend und Subtrahend können nicht vertauscht werden, ohne dass sich die Menge, die übrig bleibt, ändert.

Bei der sich an das Kursgespräch anschließenden Partnerübung haben die Teilnehmer*innen schließlich die Möglichkeit, das theoretische Wissen über die Subtraktion zu erproben, zu überprüfen und eventuell aufkommende Fragen zu stellen.

EXKURS

Ein häufig auftretender Fehler bei der Übersetzung einer Mengenhandlung in eine Subtraktionsaufgabe

Aus einer Achtermenge wird eine Fünfermenge entnommen, drei bleiben übrig. Die korrekte Gleichung lautet 8 – 5 = 3.

Die*Der Teilnehmer*in beobachtet diese Mengenhandlung und kommt zum Schluss, dass hier die Gleichung 5 – 3 = ? vorgespielt wurde.

Der Gedanke, dass bei 5 – 3 = ? zwei übrig bleiben müssten und dass diese Gleichungen deshalb nicht stimmen können, ist nicht selbstverständlich. Manchmal ist nicht klar, dass man *das Ergebnis* dann auch sehen können müsste.

Sehr oft gerät die Anfangsmenge, in diesem Falle die Acht, aus dem Blick. Es wird ausschließlich die Situation nach der Entnahme der Menge betrachtet. Im Laufe des Kursgespräches und spätestens während der Partnerübung sollte den Teilnehmer*innen deutlich werden, dass nicht eine Situation, sondern die Handlung (dynamischer Aspekt der Subtraktion), die zu dieser Situation geführt hat, in eine Gleichung übersetzt wird. Es ist hilfreich, bei Mengenhandlungen sowohl die entnommene Menge als auch die Restmenge liegen zu lassen, denn dann ist auch die Ausgangsmenge (und somit alle drei Gleichungsglieder) noch sichtbar.

3.2.1 Kursgespräch Mengenhandlung Subtraktion

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen dazu auf zu beobachten, was sie macht. Anschließend sollen die Kursteilnehmer*innen die durchgeführte Handlung beschreiben.

Die Kursleitung vollzieht eine Mengenhandlung, die zu einer Subtraktionsgleichung passt. Beispielsweise könnten von acht Stiften, die sich bereits auf dem Tisch befinden, drei weggenommen (8 – 3 = 5) werden. Teilnehmer*innen könnten gebeten werden sich umzusetzen oder es könnten Gegenstände im Raum bewegt werden. Günstig bei der Wahl der Gleichung ist, dass sich Minuend, Subtrahend und Differenz unterscheiden. Das macht das anschließende Gespräch leichter, weil nicht extra benannt werden muss, beispielsweise bei 10 – 5 = 5, welche der Fünfen denn gerade gemeint ist. Der Fokus liegt auf der Handlung und auf der Frage, die an die Endsituation der Handlung gestellt wird (Wie viele Mengenelemente liegen nach der Entfernung der Teilmenge vor?), nicht auf der bloßen Ergebnisfindung. Wichtig ist das Sprechen über die Mengenhandlung, über Glieder und Symbole einer Subtraktionsgleichung. Die Teilnehmer*innen sollten von der Kursleitung zum Reflektieren, Beschreiben und Übersetzen der Handlung aufgefordert werden.

Nachdem die Kursleitung eine weitere subtraktive Mengenhandlung vollzogen hat, werden die Teilnehmer*innen erneut gebeten, die vorgeführte Handlung zu beschreiben.

Sollte jemand bereits vorwegnehmen, dass es sich hier um Minus, die Subtraktion oder sogar um welche Gleichung es sich genau handelt, sollte die Kursleitung, wie auch schon bei der Addition, diese Idee aufgreifen und die anderen Teilnehmer*innen fragen, woran dies erkennbar ist.

Woran hat Herr/Frau/Name ... erkannt, dass es eine Minusaufgabe sein muss?

Trotz der Vorwegnahme können die unter Punkt 2 in der nachfolgenden Kurzanleitung genannten Fragen mit den Teilnehmer*innen besprochen werden.

Auch bei der Subtraktion gilt: Wenn die Bedeutung des Gleichheitszeichens zu erläutern ist, ist es wichtig zu formulieren, dass es kein *Ergebniszeichen* ist, sondern genau das bezeichnet, wofür es wortwörtlich steht: *ist gleich*. Auf einer Seite des Gleichheitszeichens **ist** mathematisch **gleich** viel wie auf der anderen Seite. Der auf der linken Seite versammelte Zahlenwert **ist gleich** dem auf der rechten Seite versammelten Zahlenwert. Es wird die Menge gesucht, die gleich viel ist wie die aus der Handlung entstandene Menge.

BEISPIEL
Versprachlichung einer subtraktiven Mengenhandlung

8 – 3	=	5
„Wenn aus einer Achtermenge eine Dreiermenge entnommen wird, …“	„… sind es gleich viel wie …“	„… fünf.“

Für die Kommunikation über Subtraktionsgleichungen benötigen die Kursteilnehmer*innen die Bezeichnungen für die Teile dieser Gleichung. Sind diese Begrifflichkeiten bekannt, kann sich in den nachfolgenden Unterrichtssequenzen präziser über Subtraktionsgleichungen ausgetauscht werden.

Folgendes Tafelbild veranschaulicht den Teilnehmer*-innen die Bezeichnungen der Gleichungsglieder. Für die sich direkt anschließenden Unterrichtssequenzen sollte das Tafelbild gut sichtbar im Raum platziert werden, sodass immer wieder nach den Begriffen geschaut werden kann.

BEISPIEL
Versprachlichung einer subtraktiven Mengenhandlung

5	–	3	=	2
Minuend	–	Subtrahend	=	Differenz
2	=	5	–	3
Differenz	=	Minuend	–	Subtrahend

Sollte das Wissen um die Mengenhandlung, die der Subtraktion zugrunde liegt, oder über die unterschiedliche Bedeutung und Funktion von Minuend, Subtrahend und Differenz noch nicht abgesichert und von allen verstanden sein, kann die Kursleitung oder aber auch ein*e Kursteilnehmer*in weitere subtraktive Mengenhandlungen vorspielen. Auch hier bietet sich die Nutzung verschiedener Gegenstände an, um einerseits den Unterricht abwechslungsreich zu gestalten und andererseits Diskussionen bezüglich der Oberbegriffsbildung zu befördern.

KURZANLEITUNG

- Mengenhandlung vorspielen
- Teilnehmer*innen die Mengenhandlung beschreiben lassen. Folgende Fragen sollen den Erkenntnisprozess fördern:

Was mache ich als Erstes/Zweites/danach? Welche Menge ist zuerst da?
Was passiert dann?
Wie groß ist die Menge, die man wegnimmt? Warum ist das nicht „Plus“?
Wie viele sind dann noch übrig?
Wie viele sind es zum Schluss?

- Zur Übertragung der Mengenhandlung in eine Gleichung helfen folgende Fragen:

Wie können Sie das, was Sie beschreiben, aufschreiben?
Gibt es eine Möglichkeit, das noch kürzer zu schreiben? Kennen Sie Zeichen und Symbole, die das Gleiche bedeuten/aussagen?

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Zahlen in einer Gleichung beschreiben die Mengen, mit denen gehandelt wird,
- das Minuszeichen bedeutet, dass eine (Teil-) Menge entnommen wird,
- der Minuend steht für die am Anfang vorhandene Menge,
- der Subtrahend repräsentiert die Menge, die entnommen wird, und
- die Differenz ist jene Teilmenge, die auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens notiert ist.

3.2.2 Partnerübung Mengenhandlung Subtraktion

EXPLORATION

Mit den folgenden Aufgaben sollen alle Teilnehmer*innen Sicherheit darin gewinnen, selbst subtraktive Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt Subtraktionsgleichungen in Mengenhandlungen zu überführen.

Diese Aufgaben dienen der Überprüfung, ob alle Teilnehmer*innen das theoretische Wissen aus dem Kursgespräch, eine subtraktive Mengenhandlung in eine Gleichung zu *übersetzen*, anwenden können.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Bevor auf der nachfolgenden Seite das Vorgehen bei diesen Aufgaben beschrieben wird, sei noch einmal an die drei Aspekte, die bereits in der Unterrichtssequenz zur *Partnerübung Mengenhandlung Addition* (s. Abschnitt 3.1.2) erwähnt wurden, erinnert.

Bei diesen Aufgaben ist das Übersetzen der Handlung in eine Gleichung nicht die einzige Denkleistung. Jene Teilnehmer*innen, die eine Aufgabe vorspielen sollen, erhalten dazu eine vorgegebene Gleichung. Sie müssen, um die Handlung vorspielen zu können, die genau umgekehrte Denkleistung erbringen, um die vorgegebene Gleichung in eine Mengenhandlung überführen zu können. Das Verständnis für die Operationslogik der Subtraktion wird vertieft bzw. erweitert.

Die Bedeutung der Null wird auch hier Gegenstand der Betrachtungen sein. Die Fantasie der Teilnehmer*innen ist gefordert, um vorzuspielen, dass nichts weggenommen wird. Spannend ist auch, ob die*der Partner*in erkennt, dass nichts weggenommen wurde. Ein Gespräch darüber, wie viel höchstens weggenommen werden kann, ist eine zusätzliche Förderung des Operationsverständnisses.

Bei zwei Gleichungen auf der Kopiervorlage ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Diese Gleichungen lassen sich nicht vorspielen. Oft bleibt der Versuch, eine solche Handlung vorzuspielen, lange in Erinnerung, sodass das Problem des kleineren Minuenden bei Subtraktionsaufgaben immer wieder schnell erkannt wird. Die Erkenntnis, dass sich eine Subtraktionsaufgabe mit größerem Subtrahenden nicht vorspielen lässt, ist wesentlich und lädt dabei gleich zum Gespräch über negative Zahlen und mögliche Situationen mit negativen Differenzen ein. Schulden zu machen wäre ein klassisches Beispiel dafür. Ich habe nur fünf Euro im Portemonnaie, der Kellner möchte aber acht Euro haben.

Da die Subtraktion häufig mit besonders vielen Fehlschlüssen behaftet ist, sollten möglichst alle Gleichungen aus der Kopiervorlage in Mengenhandlungen übersetzt und vorgespielt werden. Die Kursleitung sollte unbedingt Abwechslung ins Spiel bringen: Es können andere Tandems gebildet werden und immer andere Gegenstände zum Vorspielen genutzt werden. Es ist nicht unüblich, dass nach dem korrekten Vorspielen von zwei oder drei Gleichungen plötzlich grundlegende Fehlannahmen zutage treten. Alle Gleichungen auf der Kopiervorlage enthalten immer unterschiedliche Aspekte der Operationslogik, die erst nacheinander in verschiedenen Gleichungen thematisiert werden können und sollten. Eine mögliche Erweiterung wäre auch, das Zeichnen von Mengenhandlungen zuzulassen. Auch anhand von Zeichnungen können Missverständnisse und Unklarheiten analysiert werden.

Jeweils zwei Teilnehmer*innen arbeiten in einem Team. Die Kursleitung fertigt für jedes Team eine Kopie der **Kopiervorlage 2** an und schneidet die einzelnen Karten aus.

KOPIERVORLAGE 2

Die Karten liegen verdeckt vor den Tandems. Jede*r Teilnehmer*in nimmt eine Karte, ohne dass die*der Partner*in diese lesen kann, und überlegt sich eine passende Mengenhandlung. Anschließend wird diese vorgespielt. Ziel ist es, dass die*der Partner*in herausfindet, welche Gleichung zur vorgespielten Mengenhandlung passt. Die Kursleitung kann die Teilnehmer*innen dazu anhalten, möglichst viele verschiedene Gegenstände zum Vorspielen zu verwenden. Mögliche Materialien für die Handlung wären: Stifte, Flaschen, Büroklammern, Taschentücher, Steckwürfel, Besteck, Mobiltelefone, Kreide oder Tafelstifte. Vielleicht belohnt die Kursleitung die kreativste Übersetzung einer Gleichung in eine Mengenhandlung.

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert zu beschreiben, was soeben vorgespielt wurde, bevor sie sagen, um welche Gleichung es sich vermutlich handelt. Dieses Beschreiben der Handlung erhöht die Konzentration und die Zeitspanne zum Nachdenken über Handlung und Gleichung. Häufig fallen den Teilnehmer*innen während des Beschreibens Fehler in ihrer zuerst vermuteten Gleichung auf. Es ist ausreichend, wenn die Teilnehmer*innen reflektieren, was mit den Mengen passiert und was sich geändert hat. Im zweiten Schritt wird ermittelt, um welche Gleichung es sich handelt.

BEISPIEL
zur Beschreibung einer Mengenhandlung
Erst lagen neun Büroklammern auf dem Tisch. Dann haben Sie drei und danach noch einmal zwei Büroklammern weggenommen. Jetzt sind nur noch vier Büroklammern übrig.

Die Gleichung heißt 9 – 3 – 2 = 4.

Nach der Beschreibung der Handlung kann die*der vorspielende Teilnehmer*in entweder zustimmen oder die Mengenhandlung erneut vorspielen lassen. Wenn die Gleichung nicht korrekt ermittelt wurde, sollte noch nicht sofort aufgelöst werden, um welche Gleichung es sich handelt. Oft werden Fehler an dieser Stelle selbst entdeckt und korrigiert. Allen Lernenden sollte unbedingt die Chance gegeben werden, die Handlung – wenn nötig – auch mehrfach vorzuspielen bzw. anzuschauen. In den allermeisten Fällen sind keine Erklärungen durch die Kursleitung nötig. Sobald die erste Gleichung richtig benannt wurde, tauschen die Partner*innen ihre Rollen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Nach der Absolvierung des Kursgespräches und der Übung *Mengenhandlung Subtraktion* sollten alle Teilnehmer*innen sicher Subtraktionsgleichungen in Mengenhandlungen und Mengenhandlungen in Subtraktionsgleichungen überführen können.
- Es sollte den Teilnehmer*innen zudem deutlich geworden sein, dass Rechenoperationen Veränderungen von Mengen und Zahlen beschreiben können.
- Die Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, haben den Teilnehmer*innen verdeutlicht, dass es unlösbare Aufgaben bzw. Aufgaben mit negativen Differenzen geben kann.
- Auch die Erkenntnis um den Unterschied zwischen Addition und Subtraktion ist durch beide Gespräche und Aufgaben abgesichert.

ENDNOTEN

1 Die Gleichung $3 - 5 =$ ist lösbar, jedoch soll tendenziell in Stufe 1 im Bereich der positiven Zahlen verblieben werden. Trotzdem kann die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen diskutieren, dass Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, lösbar sind. Sie sollten sich nicht dazu hinreißen lassen, ein n. l. (nicht lösbar) als Lösung zu notieren. Man kann sagen, dass die Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar ist. Für einige Teilnehmer*innen kann es aber nur schwerlich durchschaubar sein, warum und an welchen Stellen und aus welchen Gründen manchmal ein „nicht lösbar" erscheint, wenn es offenbar eine Lösung gibt.

2 Die Kursleitung achtet darauf, dass sie wirklich die gemeinte Mengenhandlung vorspielt: Wenn zwei Stifte nacheinander zu drei Stiften gelegt werden, dann wird die Aufgabe $3 + 1 + 1$ dargestellt, nicht aber die Aufgabe $3 + 2$, welche mit einer Zweiermenge – nicht mit zwei Einermengen – arbeitet. Genau an solchen unscharfen Stellen entfalten sich die Irritationen der Teilnehmer*innen.

Anhang Kopiervorlagen

Kopiervorlage 1

Addition

4 + 3 = 7	3 + 4 = 7
3 + 0 = 3	0 + 3 = 3
2 + 4 + 3 = 9	4 + 3 + 2 = 9
1 + 1 + 2 = 4	1 + 1 + 1 + 1 = 4

Kopiervorlage 2

Subtraktion

4 − 3 = 1	3 − 4 = ___
5 − 0 = 5	5 − 5 = 0
9 − 2 − 3 = 4	9 − 3 − 2 = 4
9 − 2 − 3 = 4	1 − 5 = ___

MENGEN UND ZAHLEN VERGLEICHEN

4

4 MENGEN UND ZAHLEN VERGLEICHEN

Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- Verständnis für Zahlbeziehungen („Relationaler Zahlbegriff“) erarbeiten/festigen
- Mengen in den Kategorien „gleich viel/mehr/weniger“ mittels Abzählen und Eins-zu-Eins-Zuordnung vergleichen
- Anzahlen in den Kategorien „gleich viel/mehr/weniger“ vergleichen
- Zahlbeziehungen „um 1 mehr/weniger“, „um 2 mehr/weniger“, „um x mehr/weniger“ erkunden und automatisieren
- Vergleichszeichen kennen und richtig benutzen
- Unterschiede zwischen Anzahlen ermitteln
- Unterschiede zwischen Anzahlen durch Hinzufügen oder Wegnehmen ausgleichen

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Mengen denken („Kardinaler Zahlaspekt“)
- Abzählen von Mengen unter Einhaltung der Zählprinzipien
- „Invarianz“ (Unveränderlichkeit) von Mengen
- Zahlwortreihe bis mindestens 10 vorwärts und rückwärts
- Ziffern schreiben/lesen
- Verständnis der Rechenoperationen Plus und Minus und ihrer Zusammenhänge

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Bei Vergleichen werden Situationen oder Eigenschaften zueinander in Beziehung gesetzt. Es wird dabei auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten fokussiert.

Um Mengen zu vergleichen – Mengen enthalten unterscheidbare Elemente – kann entweder zählend die Anzahl der Elemente bestimmt werden und entsprechend diese Anzahl verglichen werden oder durch Zuordnung ermittelt werden, wodurch sich die Mengen unterscheiden. Mit Zuordnung ist gemeint, dass jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugordnet wird – *Eins-zu-Eins-Zuordnung*.

Bei einem *Vergleich* von Zahlen werden deren Beziehungen – *Zahlbeziehungen* – betrachtet und bestimmt, um wie viel sich die Zahlen unterscheiden oder ob sie gleich sind. Das kann durch die Zeichen </>/= eindeutig ausgedrückt werden. Dabei sagen die Zeichen aus, ob eine Zahl größer (>) oder kleiner (<) oder gleich (=) der anderen Zahl ist. Um wie viel sich Zahlen unterscheiden, wird durch die Differenz/den Unterschied dieser Zahlen angegeben.

Zum Verständnis von Zahlen führt, diese mit ihren Beziehungen und Vergleichen zueinander zu denken:

BEISPIEL
Sechs ist weniger als acht, aber mehr als fünf. Sechs ist genau einer/um eins mehr als fünf, aber zwei weniger als acht und einer weniger als sieben …

Eine grundlegende Zahlbeziehung ist „einer mehr/um eins mehr“ oder entsprechend „einer weniger/um eins weniger“.

Das Zahlsystem der natürlichen Zahlen ist nach dem Prinzip der *Seriation um eins* aufgebaut, das heißt, dass fortlaufend zu jeder Zahl ein Einer hinzukommt und dass jede Zahl um eins mehr ist als ihr Vorgänger, entsprechend um eins weniger als ihr Nachfolger.

Auch mathematische Ausdrücke (Terme) können verglichen werden, zum Beispiel 5 – 1 und 4 + 3. Wird von fünf eins abgezogen, bleiben vier übrig. 5 – 1 steht für vier. Werden zu vier drei dazugegeben, sind es zusammen sieben. 4 + 3 steht für sieben. Da vier kleiner sieben ist ($4 < 7$), muss auch $5 - 1 < 4 + 3$ sein.

Der wesensbestimmende Bestandteil einer *Gleichung* ist das *Gleichheitszeichen*. Beide Seiten einer Gleichung können vertauscht werden, ohne dass sich die mathematische Aussage ändert.

Anders verhält es sich bei *Ungleichungen*. Beide Seiten des Vergleichs sind durch ein *Kleiner- oder Größer-Zeichen* verknüpft. Werden die Seiten von Ungleichungen vertauscht, kehrt sich das Vergleichszeichen um.

Ziel der Unterrichtseinheit ist es, von Mengenhandlungen ausgehend mathematische Beziehungen zu abstrahieren und deren Allgemeingültigkeit festzustellen:

BEISPIELE

- Fünf ist immer einer weniger/um eins weniger als sechs. Fünf ist immer einer mehr/um eins mehr als vier.
- Diese Erkenntnis gilt für alle Mengen, in denen sich fünf Elemente befinden und damit für die Zahl 5.
- Die Zahl 5 steht für alle Mengen mit fünf Elementen.
- Die Zahl 5 ist abstrakt und muss nicht mit einer konkreten Menge in Verbindung gebracht werden.
- Die Zahl 5 kann immer in fünf Einer zerlegt werden.

Die Differenz/Der Unterschied zweier Zahlen kann durch Subtraktion ermittelt werden: Von der größeren Zahl wird die kleinere Zahl abgezogen und übrig bleibt die Differenz/der Unterschied beider Zahlen.

Wird diese Differenz/der Unterschied zu der kleineren Zahl addiert, so ergibt das die größere Zahl. Wird von der größeren Zahl die Differenz/der Unterschied subtrahiert, bleibt die kleinere Zahl übrig.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

- Um *Vergleichszeichen* korrekt einzusetzen, muss die Ausrichtung der Vergleichszeichen > und < richtig gedeutet werden.
- Mathematische Symbole beschreiben Sachverhalte. Die mathematischen Ideen hinter den Symbolen müssen verstanden werden.
- Die Deutung „mehr ist das, was mehr aussieht“, entsprechend „weniger ist das, was weniger aussieht“, ist nicht immer zutreffend. So hat die Ausdehnung einer Menge nicht unmittelbar etwas mit der Anzahl der Elemente zu tun. Zum Beispiel sind zwei Mäuse mehr Tiere als ein Elefant.
- Es kann zu Irritationen kommen, wenn für mathematische Zusammenhänge mehrere Formulierungen/Begriffe möglich sind. Zum Beispiel ist mit „um wie viel mehr“ und „wie viel mehr“ der gleiche Sachverhalt gemeint. Oder: Differenz wird synonym mit Unterschied verwendet.
- Irritierend könnte sein, dass der Anzahlunterschied auch anhand der Anschauung ermittelt werden kann und nicht wie bisher zählend.
- Beim Vergleich von Zahlen wird der Begriff Unterschied auf Form und Größe der Symbole bezogen und nicht auf die mit den Zahlen verbundene Anzahl.
- Die größte Hürde liegt in der Abstraktion von Mengen auf Zahlen. Zahlen müssen als abstraktes, universelles Konstrukt verstanden werden.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Im Kapitel 2 *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* wird das kardinale Zahlverständnis besprochen. Zahlen geben die Anzahl an. Die Antwort auf die Frage: „Wie viele?“, führt zur Ermittlung der Anzahl. Wenn die Anzahlhaftigkeit deutlich geworden ist, folgt in logischer Konsequenz, dass die Reihenfolge der Elemente/Objekte bei der Ermittlung der Anzahl unwesentlich ist. Entscheidend ist nur die Anzahl der Elemente. Jedes einzelne Element entspricht der Anzahl eins und das Zusammenfassen der Einer/Einser führt zu einer Gesamtmenge, zur Anzahl an Elementen in dieser Menge.

Im Kapitel 3 *Mengen und Zahlen verändern* wird ein grundlegendes Verständnis der Rechenoperationen *Addition* und *Subtraktion* erarbeitet.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): *DVV-Rahmencurriculum Rechnen.* Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn. www.grundbildung.de

- Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianz: *Stufe 1, S. 12*
- Zählen: *Stufe 1, S. 13 f.*
- Seriation: *Stufe 1, S. 15 f.*
- Addition und Subtraktion: *Stufe 1, S. 26 ff.*
- Rechenwege: *Stufe 1, S. 20 ff.*
- Der Kardinale Zahlaspekt: *Stufe 1, S. 28 ff.*
- Bedeutung der Symbolisierung: *Stufe 1, S. 24*
- Nichtzählende Strategien: *Stufe 1, S. 20 ff.*
- Verständnis „mehr/weniger", „um eins mehr/weniger", „um zwei mehr/weniger" *Stufe 1, S. 34 ff.*

Michael Gaidoschik (2007/2015). Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. Wien: G&G Verlag (8. Auflage).

Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis" vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.

V Welche Materialien werden benötigt?

- Steckwürfel
- Chips
- Holzsteine
- Karten 1 – 10
- Fingerbilder
- weitere Darstellungen der Zahlen

4.1 Vergleich

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen verdeutlichen sich, dass „etwas zu vergleichen“ bedeutet, Eigenschaften zueinander in Beziehung zu setzen. Es wird herausgearbeitet, worauf bei der Unterscheidung von Mengen fokussiert wird: Auf die Anzahl ihrer Elemente.

Um Mengen zu vergleichen, können grob die Begriffe mehr/weniger/ungefähr gleich verwendet werden. Um Mengen exakt zu beschreiben, muss die Anzahl der in der Menge enthaltenen Elemente ermittelt werden. Das kann durch Zählen der einzelnen Elemente erfolgen. Der Mengenvergleich kann durch einen Zahlvergleich symbolisiert werden. Durch direkte Eins-zu-Eins-Zuordnung einzelner Elemente beider Mengen müssen nicht alle Elemente gezählt werden, sondern nur die Elemente, für die keine Zuordnung möglich ist – um diese Zahl ist die betreffende Menge größer als die andere Menge.

Die Anzahl der Elemente einer Menge wird durch Zahlen symbolisiert. Zahlen beschreiben Anzahlen. Für Anzahlvergleiche können Symbole verwendet werden: > (größer als), < (kleiner als), = (gleich viel). Dabei wird zwischen Ungleichungen und Gleichungen unterschieden.

4.1.1 Kursgespräch – Vergleiche

Didaktische Ziele
- Beispiele für Vergleiche im Alltag (Situationen, Eigenschaften, Quantitäten ...) sammeln und erkunden
- Begriffe (Vergleich, Unterschied, Quantität, kleiner/größer, mehr/weniger, gleich u.v.m.) kennen und richtig benutzen

Der Begriff *Vergleich* ist gängig. Menschen vergleichen Eigenschaften von Dingen oder Lebewesen, zum Beispiel Temperaturen, Größen, Preise, Farben oder Anzahlen und sie stellen Beziehungen zwischen dem, was verglichen wurde, her. Es werden Unterschiede und Gemeinsamkeiten gesucht. Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen nach Beispielen zu Vergleichen aus ihrem Alltag und lässt beschreiben, was sie unter dem Begriff *Vergleich* verstehen.

BEISPIELE
- *Heute ist es wärmer als gestern.*
- *Der Song gefällt mir besser als der andere Song.*
- *Ich fühle mich schon viel wohler. Gestern war ich noch krank.*
- *Dieses T-Shirt ist teurer als das andere T-Shirt.*
- *Dein Wohnzimmer ist größer als meines.*

Im Kursgespräch wird gemeinsam nach der Antwort gesucht, was in den genannten Beispielen verglichen wurde.

BEISPIELE
- *Heute ist es wärmer als gestern: Man kann die Temperatur messen.*
- *Der Song gefällt mir besser als der andere Song: Der eine Song macht mich fröhlich und der andere Song nicht. Das ist von Person zu Person unterschiedlich.*
- *Ich fühle mich schon viel wohler. Gestern war ich noch krank: Eine Krankheit kann man nicht genau messen. Jede Person fühlt sich dabei anders.*
- *Dieses T-Shirt ist teurer als das andere. Man kann den Preis am Preisschild ablesen.*
- *Dein Wohnzimmer ist größer als meines: Man kann die Größe der beiden Zimmer messen.*

Bei einem Vergleich werden Situationen oder Eigenschaften zueinander in Beziehung gesetzt. Verglichen werden können: Ereignisse, Sachverhalte, Dinge, Elemente, Eigenschaften, …

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, eine allgemeine Beschreibung für den Begriff *Vergleich* zu formulieren. Dies könnte eine Antwort sein:

Für einen Vergleich braucht man mindestens zwei Situationen. Manchmal sind es auch mehr als zwei Situationen. Wenn es dabei um Zahlen geht, ist es ein Zahlen- oder Wertevergleich. Das nennt man auch einen quantitativen Vergleich. Man vergleicht Quantitäten. Eine Quantität kann man in Zahlen beschreiben.

Die Kursleitung fragt, ob alle Teilnehmer*innen den Begriff *Quantität* kennen. Alternativ könnte der Begriff zahlenhafter Vergleich verwendet werden.

Zum Beispiel bei Temperaturen: Gestern waren es 19 °C und heute sind es 23 °C. Man gibt Zahlenwerte (Quantitäten) an.

Die Kursleitung fragt nach weiteren Zahlenbeispielen, um etwas zu vergleichen – Größe, Gewicht, Preis, …

Gemeinsam wird im Kursgespräch ein Tafelbild entwickelt und für die Begriffe *nichtquantitative Vergleiche* (ohne Zahlen) und *quantitative Vergleiche* (mit Zahlen) Beispiele gesammelt und dafür Formulierungen abgeleitet. Die Kursleitung kann ein Beispiel aus der nachfolgenden Tabelle vorgeben.

Wichtig ist es, auch auf die Begriffe *genauso* und *gleich* zu fokussieren. Beide Formulierungen sind inhaltlich den Vergleichen zuzuordnen. In dem Wort *Vergleich* ist bereits das Wort *gleich* enthalten. Wenn etwas verglichen wird, wird versucht den *Unterschied* der Dinge, die verglichen wurden, herauszufinden. Wenn kein Unterschied vorhanden ist, sind die Dinge, die verglichen wurden gleich.

nichtquantitative Vergleiche (ohne Zahlen)	**quantitative Vergleiche (mit Zahlen)**
angenehmer/ unangenehmer als	größer/kleiner als
gesünder/ ungesünder als	wärmer/kälter als
gefällt besser/ gefällt weniger als	gleich
wärmer/kälter als	höher/niedriger als
genauso oder gleich	teurer/billiger als
schlechter/besser als	früher/später als

RÜCKSCHAU

Es können Ereignisse, Dinge, Größen, Farben, Empfindungen, Lebewesen, Zeiten u. v. m. unterschieden und damit verglichen werden. Auch wenn etwas gleich/genauso ist, wird verglichen. Bei quantitativen Vergleichen spielen Zahlen oder Quantitäten eine Rolle. Für diese Vergleiche passen die Begriffe: größer/kleiner, höher/niedriger, weniger/mehr, gleich.

4.1.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt 4.1a – Vergleichszeichen

Didaktisches Ziel
Vergleichszeichen kennen und in Vergleichen von Mengen, Zahlen, mathematischen Ausdrücken richtig benutzen

Mit Hilfe von Symbolen können mathematische Sachverhalte dargestellt werden.

Die Kursleitung schreibt Vergleichszeichen an die Tafel und fragt die Teilnehmer*innen, ob ihnen die Bedeutung dieser Symbole bekannt ist.

Abbildung 4.1-1 Vergleichszeichen

Viele der Teilnehmer*innen werden damit vertraut sein. Die Kursleitung schätzt abhängig vom Leistungsvermögen der Gruppe ein, ob an dieser Stelle auf die angegebenen weiteren Zeichen (≠ ≈ ≤ ≥) hingewiesen wird.

Unsicherheiten gibt es häufig, die richtige Richtung von > und < zu schreiben. Hier hilft der Hinweis, die Öffnung des *Größer-Kleiner-Zeichens* zeige in die Richtung des größeren Wertes und die Spitze in Richtung des kleineren Wertes.

In der Kindheit wurden häufig ein Krokodil, Drachen oder Fisch als Gedankenstütze benutzt. Das Krokodil/der Drachen/der Fisch wendet sich mit geöffnetem Maul in die Richtung, in der das meiste Futter liegt. Die Öffnung des Mauls sieht aus wie das Vergleichszeichen. Diese Bemerkung wird Schmunzeln hervorrufen, könnte jedoch eine Eselsbrücke sein.

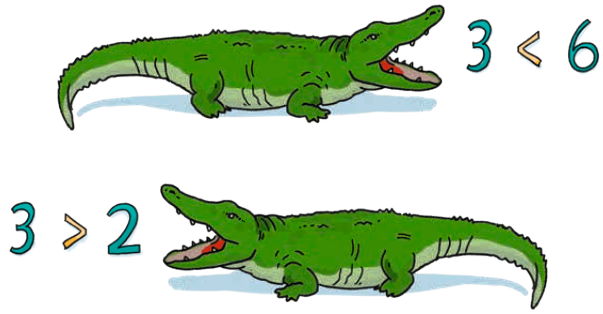


Abbildung 4.1-2 Eselsbrücken – Das Krokodil wendet sich in die Richtung, wo das meiste Futter liegt

Eine weitere häufig anzutreffende Merkhilfe sind der Größe nach geordnete Türme aus Bausteinen. Damit wird die Richtung des Vergleichszeichens vorgegeben. Die Öffnung des Zeichens entspricht dem höheren Turm, die Spitze dem niedrigeren.

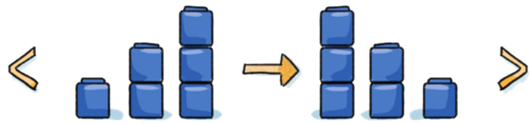


Abbildung 4.1-3 Die Neigung der geordneten Bausteintürme gibt die Richtung des Vergleichszeichens vor

Die Kursleitung bittet nach dem gemeinsamen Lesen der Aufgabenstellung die Teilnehmer*innen, das **Aufgabenblatt 4.1a** *Vergleichszeichen* zu bearbeiten.

Dabei sollen die Teilnehmer*innen darauf achten, wie sie zu ihren Lösungen gelangen, damit dies in der Auswertung diskutiert werden kann. Das Aufgabenblatt ist in drei Abschnitte unterteilt: Zahlenvergleiche, Vergleich mathematischer Ausdrücke und Mengenvergleiche. Das Aufgabenblatt dient dazu, den Lernstand der Teilnehmer*innen zu Vergleichszeichen zu ermitteln.

In den Abbildungen 4 bis 6 sind zudem mögliche Fehlerursachen angegeben.

In der gemeinsamen Auswertung im Kursgespräch wird das Aufgabenblatt abschnittsweise besprochen. Dabei stellen die Teilnehmer*innen dar, mit welchen Überlegungen sie jeweils zu ihren Lösungen gelangt sind.

AUFGABENBLATT 4.1 a

Im ersten Abschnitt des Aufgabenblattes werden Mengen verglichen.

Mengenvergleiche			Fehlerursachen
●	=	○	ZMAV
○ ○ ○	<	● ● ● ●	ZMAV
● ● ● ● ● ●	>	○ ○ ○ ○ ○	ZMAV
○ ○ ● ● ●	=	● ● ● ● ●	ZMAV
◆ ◆	=	● ●	ZMAV
◆ ◆ ◆ ◆	>	●	ZMAV

Z = Zeichenverständnis; M = Mengenverständnis; A = Anzahlverständnis; V = Keine Beziehung zwischen Visualisierung und Anzahl

Abbildung 4.1-4 Lösungen und Fehlerursachen, Aufgabenblatt 4.1 a – Vergleich von Mengen

Um diese Aufgaben richtig zu lösen, muss verstanden sein, dass bei Mengenvergleichen die Anzahl der Elemente betrachtet werden.

Im zweiten Abschnitt werden Zahlen verglichen.

Zahlenvergleiche			Fehlerursachen
14	<	41	Zahlendreher, ZA
3	<	5	ZA
65	>	64	ZA
9	>	8	ZA
9	=	9	ZA
100	<	1000	ZA
32	>	23	Zahlendreher, ZA

Z = Zeichenverständnis; A = Anzahlverständnis

Abbildung 4.1-5 Lösungen und Fehlerursachen, Aufgabenblatt 4.1 a-Zahlenvergleiche

Die Kursleitung kann aus der Anwendung der Vergleichszeichen und aus den Darlegungen der Teilnehmer*innen ableiten, wie bei den Teilnehmer*innen das Zeichenverständnis (Vergleichszeichen) und das Anzahlverständnis (Zahlverständnis) entwickelt ist. Entsprechend der Ergebnisse entscheidet die Kursleitung, ob es weitere Erläuterungen zu den Vergleichszeichen oder sogar zum Anzahlverständnis geben muss.

Im dritten Abschnitt werde Terme verglichen. Eine weitere Fehlerursache können *Zahlendreher* sein. Teilnehmer*innen, die Zahlendreher schreiben, haben Schwierigkeiten, zwischen Zehnern und Einern zu differenzieren. Falls das so ist, verweist die Kursleitung auf nachfolgende Unterrichtskonzepte – Kapitel 9 *Immer zehn – Das Bündelungsprinzip*.

Erst, wenn die Teilnehmer*innen Zahlenvergleiche sicher beherrschen, können mathematische Ausdrücke verglichen werden.

Vergleich mathematischer Ausdrücke			Fehlerursachen
3 + 2	=	5	ZATO
3 + 2	=	2 + 3	ZATO
3 + 2	=	10 – 5	ZATO
1 + 7	>	7	ZATO
5	<	4 + 2	ZATO
2 + 2 + 2	=	7 – 1	ZATO
Z = Zeichenverständnis; A = Anzahlverständnis; T = Term nicht als mathematisch sinnvoll erkannt; O = Verständnis der Rechenoperationen			

Abbildung 4.1-6 Lösungen und Fehlerursachen, Aufgabenblatt 4.1 a – Vergleich mathematischer Ausdrücke

Um diese mathematischen Ausdrücke miteinander zu vergleichen, müssen die Teilnehmer*innen Zeichen- und Anzahlverständnis besitzen und die Addition und Subtraktion anwenden können.

Gegenstand des unmittelbar nachfolgenden Kursgesprächs ist es, sich vertiefend mit dem Vergleich mathematischer Ausdrücke und mit Mengenvergleichen zu beschäftigen.

Wenn Teilnehmer*innen die Aufgaben zu den Mengenvergleichen und zu den Vergleichen mathematischer Ausdrücke auf dem **Aufgabenblatt 4.1 a** noch nicht oder nur teilweise lösen konnten, wird dieses Aufgabenblatt nach der nächsten Unterrichtssequenz erneut besprochen.

4.1.3 Kursgespräch – Mengen-/Anzahlvergleiche und Vergleiche mathematischer Ausdrücke

Didaktisches Ziel
mögliche Vertiefung, wenn sich in der vorhergehenden Bearbeitung des Aufgabenblatts 4.1a noch Schwierigkeiten zeigen

Die Kursleitung zeigt die beiden nachfolgenden Abbildungen mit Hilfe eines Projektors. Die Erläuterungen zu den Begriffen illustriert die Kursleitung immer wieder an Hand der Abbildungen.

Mengenvergleich		>		
Farbvergleich	rot	/	weiß	Eigenschafts-vergleich
Grober Vergleich	mehr/viel	>	weniger/wenig	Mengenvergleich
Exakter Vergleich	28	>	10	Anzahlvergleich

Abbildung 4.1-7 Vergleich von Blüten – grober und exakter Vergleich

Mengen enthalten Elemente/Objekte, die man unterscheiden kann. In diesem Beispiel besteht die eine Menge aus roten und die andere Menge aus weißen Blüten.

Man kann die Farben der Blüten vergleichen.

Wenn man wissen will, ob von dem einen mehr/weniger als von dem anderen vorhanden sind, vergleicht man die Menge quantitativ. Sind es mehr oder weniger rote Blüten als weiße Blüten?

*Man vergleicht die Mengen zuerst **grob**. Grob vergleichen heißt: Es ist entweder mehr oder weniger von der einen Menge da. Es kann aber auch sein, dass ungefähr gleich viel vorhanden ist. Wenn man grob vergleicht, kann man sich auch irren. Man weiß es genau, wenn man nachzählt. Dabei schätzt man ab oder ermittelt, ob sich die Mengen unterscheiden, zum Beispiel in der Ausdehnung oder Anordnung. In diesem Beispiel unterscheiden sich die Mengen in ihrer Ausdehnung deutlich – es sind mehr rote als weiße Blüten vorhanden. Mengen können auch **exakt** verglichen werden. Die Frage lautet: Wie viele (exakt, genau) sind es jeweils mehr oder weniger? Dafür kann man die Anzahl bestimmen. **Die Anzahl ist die Zahl, die man durch Zählen bekommt.** Jedes Element wird genau einmal gezählt. Damit kann man die beiden Mengen vergleichen. In diesem Beispiel ist 28 (rote Blüten) größer als 10 (weiße Blüten).*

Man kann auch beide Mengen ordnen und jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuordnen. Bleiben danach Elemente übrig, kann man an diesen abzählen, um wie viel genau sich die eine Menge von der anderen Menge unterscheidet. Damit kann man den Unterschied der beiden Mengen feststellen.

*In der folgenden Abbildung wurden die roten und die weißen Blüten geordnet. Man kann genau feststellen, für welche weiße Blüte auch genau eine rote Blüte vorhanden ist – und umgekehrt. Für den Großteil der roten Blüten findet man keine weiße Blüte. Dieser Teil ist der **Unterschied** beider Mengen. In dieser Anzahl unterscheiden sich die Mengen roter und weißer Blüten.*

Abbildung 4.1-8 Exakter Mengenvergleich – Ermittlung des Unterschiedes

Oftmals wird diese Art der Unterschiedsbestimmung den Teilnehmer*innen nicht vertraut sein. Sie sollten diese aber in ihr Repertoire des Mengenvergleichs aufnehmen, um abzusichern, dass ihr Begriff von mehr und weniger wirklich ein mengenhafter ist und nicht lediglich die Idee umfasst, dass mehr dort ist, wo weiter gezählt werden muss.[1]

Wie viel (exakt, genau) von der einen Menge mehr oder weniger vorhanden ist, wird im nachfolgenden Kapitel Gegenstand der Betrachtungen sein.

Bei Mengenvergleichen können eckige Teile mit runden Teilen verglichen werden, hier Quadrate mit Kreisen. Der Fokus der Betrachtung von Mengen liegt in dieser Unterrichtssequenz ausschließlich auf deren jeweiliger Anzahl.

Die Kursleitung erläutert Folgendes an der Tafel:

Hier sind zwei eckige Teile und zwei runde Teile.

Die Anzahl der Elemente in beiden Mengen ist gleich, sie beträgt jeweils zwei.

◆ ◆ = ● ●

2 = 2

Ebenso können die Anzahlen weißer und schwarzer Kreise oder auch die Anzahl von Birnen und Äpfeln verglichen werden. Hier ist 5 > 4.

5 > 4

Um den mathematischen Ausdruck *3 + 2* mit dem mathematischen Ausdruck *10 – 5* zu vergleichen, leitet die Kursleitung die Vorgehensweise an der Tafel her und formuliert dabei Erläuterungen.[2]

3 + 2 bedeutet: Füge 3 und 2 zusammen. Es sind insgesamt fünf.

3 + 2 = 5

10 – 5 bedeutet: Nimm 5 von der 10 weg. Es bleiben fünf übrig.

10 – 5 = 5

Für den Vergleich beider mathematischen Ausdrücke kann ein Gleichheitszeichen (=) verwendet werden, da beide zu der Zahl Fünf führen.

10 – 5 = 3 + 2

5 = 5

Wenn ein Gleichheitszeichen eingesetzt werden kann, spielt es keine Rolle, auf welcher Seite der jeweilige mathematische Ausdruck steht.

10 – 5 = 3 + 2

3 + 2 = 10 – 5

4.1.4 Kursgespräch – Gleichungen und Ungleichungen

Didaktische Ziele
- Gleichheitszeichen kennen und richtig verwenden
- Strukturen von Gleichungen und Ungleichungen erkunden

Setzt man ein Gleichheitszeichen, entsteht eine Gleichung. Beide Seiten können vertauscht werden, ohne dass sich die Aussage ändert.

Das Gleichheitszeichen sagt Folgendes aus: Die Zahlen, die auf beiden Seiten stehen, sind gleich.

So auch in folgenden Beispielen, die die Kursleitung an der Tafel erläutert.

BEISPIELE

Aufgabe: Vergleichen Sie die mathematischen Ausdrücke 2 + 2 + 2 und 7 – 1

In diesem Beispiel führen beide mathematischen Ausdrücke zu der Anzahl 6 – zwei und zwei dazu und noch einmal zwei dazu sind zusammen sechs. Von sieben eins entnommen sind auch sechs. Damit stehen auf beiden Seiten gleiche Anzahlen/Zahlen.

2 + 2 + 2 = 7 – 1

7 – 1 = 2 + 2 + 2

6 = 6

Aufgabe: Vergleichen Sie den mathematischen Ausdruck 3 + 2 und die Zahl 5

Beide sind gleich, im Sinne der Anzahl für die die Ausdrücke stehen.

Dass die Seiten vertauscht werden können, gilt auch für den mathematischen Ausdruck 3 + 2 (drei und zwei dazu, es sind insgesamt fünf) und die Zahl 5. Auch hier steht fünf für beide Seiten der Gleichung.

3 + 2 = 5

5 = 3 + 2

5 = 5

RÜCKSCHAU

Das *Gleichheitszeichen* oder *Gleich-Viel-Zeichen* wird in Gleichungen als Symbol/Zeichen für Gleichheit verwendet. Das Gleichheitszeichen setzt genau eine Aussage: Die auf den beiden Seiten des Zeichens versammelten Zahlen/Anzahlen sind gleich.

Die Struktur der beiden Seiten kann sich unterscheiden, aber nicht deren Ergebnisse/Anzahl.

Die Seiten einer Gleichung sind deshalb immer vertauschbar.

Die Kursleitung erläutert die nachfolgenden Beispiele an der Tafel. Es geht dabei um Größer-Kleiner-Zeichen und um Ungleichungen. Wird eines der beiden Zeichen > oder < eingesetzt, entsteht eine Ungleichung.

BEISPIELE

Aufgabe: Vergleichen Sie die Zahl 5 mit dem mathematischen Ausdruck 4 + 2

Wird die Zahl 5 mit dem mathematischen Ausdruck 4 + 2 (vier und zwei dazu: es sind insgesamt sechs) verglichen, kann dafür das Vergleichszeichen **kleiner als** eingesetzt werden, denn fünf ist kleiner als sechs.

4 + 2 = 6
5 < 6
5 < 4 + 2

Beim Vertauschen der Seiten muss das Vergleichszeichen umgekehrt werden, denn sechs ist größer als fünf und entsprechend ist 4 + 2 größer als die Zahl 5.

6 > 5
4 + 2 > 5

Aufgabe: Vergleichen Sie den mathematischen Ausdruck 1 + 7 und die Zahl 7

Wird der mathematische Ausdruck 1 + 7 (eins und sieben dazu: es sind insgesamt acht) mit der Zahl 7 verglichen, kann dafür das Vergleichszeichen **größer als** eingesetzt werden, denn acht ist größer als sieben.

1 + 7 = 8

8 > 7
1 + 7 > 7

Beim Vertauschen der Seiten muss das Vergleichszeichen umgekehrt werden, denn sieben ist kleiner als acht und entsprechend ist die Zahl 7 kleiner als 1 + 7.

7 < 8
7 < 1 + 7

RÜCKSCHAU

Die Zeichen < oder > kennzeichnen, dass beide Seiten nicht gleich, also *ungleich* sind. Die eine Seite versammelt im Ergebnis eine größere Zahl/eine größere Anzahl als die andere. Eine Seite ist also entweder größer als oder kleiner als die andere. So entstehen *Ungleichungen*.

In Ungleichungen sind die Seiten nicht einfach vertauschbar. Wenn die Seiten in Ungleichungen vertauscht werden, dann muss auch das *Vergleichszeichen* umgekehrt werden.

An dieser Stelle sollte, falls es notwendig ist, erneut das **Aufgabenblatt 4.1 a** bearbeitet werden.

Ein*e Teilnehmer*in wird von der Kursleitung gebeten, an der Tafel mathematische Ausdrücke zu vergleichen, die die Teilnehmer*innen zurufen.

Die mathematischen Ausdrücke werden an der Tafel zunächst verglichen, das richtige Vergleichszeichen eingesetzt, danach die Seiten vertauscht und erneut verglichen. Es wird gemeinsam im Kursgespräch geklärt, ob die Vorgehensweise richtig war.

Die Kursleitung entscheidet je nach Lernstand der Teilnehmer*innen, wie viele Aufgaben gelöst werden.

BEISPIELE

Aufgabe: Vergleich von 5 + 4 und 9 – 3

Lösung:	**5 + 4 > 9 – 3**
Begründung:	**9 > 6**
Tausch der Seiten:	**9 – 3 < 5 + 4**
Begründung:	**6 < 9**

Zusammenfassung: Bei Ungleichungen kehren sich die Vergleichszeichen beim Tausch der Seiten um.

Aufgabe: Vergleich von 10 – 3 und 2 + 5

Lösung:	**10 – 3 = 2 + 5**
Begründung:	**7 = 7**
Tausch der Seiten:	**2 + 5 = 10 – 3**
Begründung:	**7 = 7**

Zusammenfassung: Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.

4.1.5 Kursgespräch – Ungleichung in Gleichung umwandeln

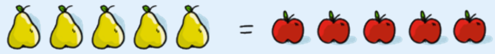
Didaktisches Ziel
Gleichungen und Ungleichungen unterscheiden und Ungleichungen ausgleichen

Interessant ist jetzt folgendes Gedankenspiel. Was müsste verändert werden, damit beim Vergleich beider Seiten ein Gleichheitszeichen geschrieben werden könnte – damit also eine Ungleichung zu einer Gleichung wird? Anders gefragt: Was könnte man machen, damit auf beiden Seiten gleich viele liegen?

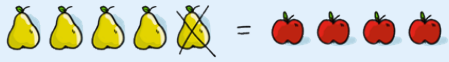
Die Kursleitung entwickelt ein Tafelbild und erläutert die Vorgehensweise.

Vergleicht man die Menge von fünf Birnen mit der Menge von vier Äpfeln,

enthält die Birnenmenge mehr Elemente als die Apfelmenge. Fünf Birnen sind mehr Elemente als vier Äpfel. Wenn man die jeweilige Anzahl der Elemente bestimmt, kann man dafür schreiben: 5 > 4.



Es werden gleich viele Elemente, wenn ein Apfel dazukommt. Dafür kann man 4 + 1 schreiben: zu vier Äpfeln kommt ein Apfel dazu. Jetzt sind es fünf Äpfel und fünf Birnen. Also gleich viele. Die Anzahl der Elemente ist gleich groß.



Nimmt man eine Birne weg, dann ist es eine weniger als fünf, also 5 – 1, dann sind es vier Birnen und vier Äpfel. Ebenfalls gleich viele.

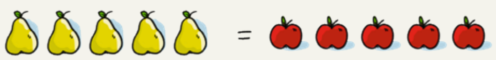
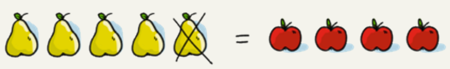
Mengenvergleich	Rechenoperation	Anzahlvergleich
		5 > 4
	5 = 4 + 1	5 = 5
	5 – 1 = 4	4 = 4

Abbildung 4.1-9 Vergleich von Birnen und Äpfeln – Mengenvergleich, Rechenoperation und Anzahlvergleich

Die Kursleitung bespricht mit den Teilnehmer*innen weitere Beispiele. Im Kursgespräch werden die Fragen beantwortet. Zum Beispiel:

Vergleichen Sie sieben Kreise mit zehn Quadraten.

Welches Vergleichszeichen setzen Sie, wenn man die Anzahlen der Elemente vergleichen will?

Wie können Sie jeweils die einzelnen Mengen verändern, damit man ein Gleichheitszeichen einsetzen kann?

Schreiben Sie dafür die passenden Additions- und Subtraktionsaufgaben auf.

Vergleichen Sie 3 mit 2 + 2

Mögliche Fragen:

Welches Vergleichszeichen setzen Sie, wenn Sie beide Seiten vergleichen?

Warum ist das so?

Wenn Sie beide Seiten vertauschen, wie verändert sich das Vergleichszeichen?

Wie können Sie eine Seite verändern, damit man ein Gleichheitszeichen einsetzen kann?

Können Sie auch die andere Seite verändern, damit man ein Gleichheitszeichen einsetzen kann?

RÜCKSCHAU

In der Mathematik können *Mengen, Anzahlen* oder *mathematische Ausdrücke (Terme)* verglichen werden.

Um zwei Mengen *exakt* zu vergleichen, kann zum einen die jeweilige Anzahl der Elemente bestimmt werden, um damit direkt die entsprechenden Zahlen zu vergleichen.

Zum anderen kann zunächst ermittelt werden, worin sich die Mengen gleichen – jedem Element der einen Menge wird genau ein Element der anderen Menge zugeordnet. Die Anzahl der Elemente, die nicht zuzuordnen sind, entspricht dem exakten *Unterschied*. Ist kein Unterschied vorhanden, sind die Mengen gleich. Die Menge, die aus mehr Elementen besteht, ist die größere Menge. Entsprechend ist die Menge, die aus weniger Elementen besteht, die kleinere.

Um mathematische Ausdrücke miteinander zu vergleichen, muss ermittelt werden, für welche Zahl/Anzahl diese mathematischen Ausdrücke stehen. Entsprechend werden die Zahlen verglichen. Es wird zwischen *Ungleichungen* und Gleichungen differenziert.

Die Vergleichszeichen, die dafür als mathematische Symbole verwendet werden, sind:

> (größer als), < (kleiner als) für Ungleichungen und
= (gleich) für Gleichungen.

Ungleichungen in Gleichungen umzuwandeln heißt mathematisch das auszugleichen, worin sich beide Seiten unterscheiden.

Mit Hilfe von mathematischen Symbolen (hier >, <, =) sowie Zahlen oder mathematischen Ausdrücken werden mathematische Aussagen formuliert.

4.2 Der Unterschied

EXPLORATION

Mehr, weniger oder *gleich viele* sind wesentliche Begriffe, wenn die Anzahlen der Elemente einer Menge verglichen werden sollen und sind ebenso wichtige Begriffe beim Vergleich von Zahlen.

Um Zahlen zu verstehen, sind Zahlen mit ihren Beziehungen und Vergleichen zueinander zu denken: Drei ist weniger als vier, aber mehr als zwei. Vier ist genau einer/eins mehr als drei. Fünf hingegen ist zwei mehr als drei. Wobei drei deswegen genau zwei weniger ist als fünf. Zwei und drei zusammen sind gleich viel wie fünf.

Mit diesem Wissen über Zahlbeziehungen kann ein grundlegendes Zahlverständnis entwickelt werden.

4.2.1 Gruppenarbeit, Aufgabenblatt 4.2 a und Kursgespräch – Anzahlvergleiche

Didaktische Ziele
- Formulierungsvarianten für Anzahlvergleiche kennen und anwenden
- Vergleichsbegriffe richtig benutzen und Begründungen geben

Wozu immer wieder Formulierungen?

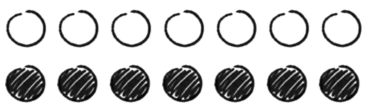
Diese Frage wird immer wieder gestellt und oft beklagen sich Teilnehmer*innen darüber. Denn eigentlich wollen sie doch rechnen lernen.

Dass aber Sprache, Formulierungen, Verständnis von Begriffen und Begründungen eine Voraussetzung für verständiges Rechnen sind, wird oft erst später erkannt.

AUFGABENBLATT 4.2 a

Im **Aufgabenblatt 4.2 a** *Der Unterschied* geht es darum, rechnerische Sachverhalte zu beschreiben und zu begründen.

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, sich in kleinen Gruppen (zwei bis drei Personen) zusammenzufinden und gemeinsam die Fragen, die auf dem Aufgabenblatt formuliert sind, zu beantworten. Die Kursleitung weist die Teilnehmer*innen nach dem gemeinsamen Lesen der Aufgabenstellung darauf hin, dass in dieser Unterrichtssequenz der Schwerpunkt darauf liegt, abgebildete Sachverhalte sprachlich auszudrücken. Deshalb sollen neben den Antworten auch Begründungen formuliert werden.

	Fragen	Antworten
1	 Sind es mehr weiße oder mehr schwarze Kreise?	**Es sind mehr schwarze Kreise als weiße.** A: Die Anzahl der Kreise kann jeweils durch Zählen ermittelt werden: 7 weiße/8 schwarze. 8 > 7: also mehr schwarze. B: Indem jedem weißen ein schwarzer Kreis (z. B. durch Verbinden mit einem Strich) zugeordnet wird, bleibt noch ein schwarzer Kreis übrig, d. h. es sind mehr schwarze.
2	 Wie viel schwarze Kreise sind es mehr als weiße Kreise?	**Es sind keine schwarzen Kreise mehr als weiße. Es sind gleich viele Kreise weiß und schwarz.** A: zählend – 7 weiße/7 schwarze. 7 = 7, also keiner mehr. B: zuordnend – Es bleibt kein Kreis übrig, also sind es gleich viele.

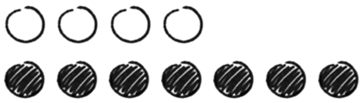
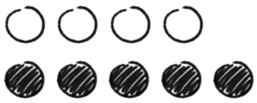
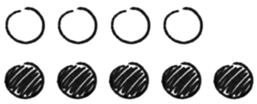
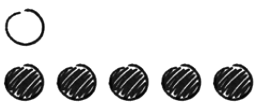
3	 Wie viel weiße Kreise sind es weniger als schwarze?	**Es sind drei weiße Kreise weniger als schwarze.** A: zählend – 4 weiße/7 schwarze. Vier ist drei weniger als sieben. B: zuordnend – Es sind drei schwarze mehr, also sind es drei weiße weniger.
4	 Um wie viele sind die schwarzen Kreise mehr als die weißen?	**Die schwarzen sind um einen/eins mehr als die weißen.** A: zählend – 4 weiße/5 schwarze. Fünf sind um einen/eins mehr als vier. B: zuordnend – es ist ein schwarzer mehr, also um einen/eins mehr.
5	 Um wie viele sind die weißen Kreise weniger als die schwarzen?	**Das ist das gleiche Bild wie bei Aufgabe 4. Die weißen sind um einen/eins weniger als die schwarzen.** Musste hier erneut gelöst werden oder wurde erkannt, dass die Bilder mit Aufgabe 4 identisch sind? Wieso wird hier „um wie viel“ gefragt? Könnte auch „wie viel“ gefragt werden?
6	 Um welche Anzahl unterscheiden sich beide Reihen?	**Die beiden Reihen unterscheiden sich um drei.** Lösung aus der Anschauung oder zählend?
7	 Wie groß ist der Unterschied zwischen den beiden Reihen?	**Der Unterschied zwischen den beiden Reihen beträgt vier.** Lösung aus der Anschauung oder zählend?

Abbildung 4.2-1 Formulierungsvarianten im Kursgespräch, Aufgabenblatt 4.2 a

Im Kursgespräch stellt jeweils ein Team die gefundenen Antworten der Aufgaben 1 bis 7 vor. Die Kursleitung stellt nach jeder Aufgabe verschiedene Formulierungen zur Diskussion. Gemeinsam werden diese Antworten mit den Antworten der Teilnehmer*innen verglichen und entschieden, welche Formulierungen den Sachverhalt einleuchtender wiedergeben. Ab der Aufgabe 5 sind zusätzliche Fragen für das Kursgespräch angegeben.

4.2.2 Aufgabenblatt 4.2 b und Kursgespräch – Unterschied

Didaktische Ziele

- Mengenvergleiche anstellen und Unterschiede exakt bestimmen
- Vorgehensweisen beschreiben und Begründungen formulieren

In dieser Unterrichtssequenz geht es darum, den Unterschied zwischen Anzahlen zu bestimmen.

Im Kapitel 4.1 *Vergleich* wurden die Mengen roter Blüten und weißer Blüten verglichen. Um zu ermitteln, wodurch sich beide Mengen unterscheiden, wurden die Mengen geordnet. Jeder weißen Blüte wurde eine rote Blüte zugeordnet. Beide Mengen unterscheiden sich durch die roten Blüten, denen keine weißen zugeordnet werden konnten (siehe Abbildung 4.1-8).

Eine andere Möglichkeit wurde ebenso besprochen: Von beiden Mengen können die Anzahlen der

Elemente zählend bestimmt werden. Danach werden die Zahlen verglichen.

Das Aufgabenblatt 4.2 a *Sind es gleich viele?* greift dieses Thema erneut auf. Am Ende dieser Unterrichtseinheit sollen die Teilnehmer*innen in der Lage sein, den Unterschied exakt zu bestimmen und vor allem auch sprachlich zu beschreiben.

Die Kursleitung bespricht schrittweise gemeinsam mit den Teilnehmer*innen die Vorgehensweise zur Lösung der Aufgaben. Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, sich die Lösungen auf dem Aufgabenblatt zu notieren.

Belebend für das Kursgespräch ist es, beispielhaft einzelne Anordnungen an die Tafel zu übertragen und dabei nach Begründungen zu suchen, warum eine zählende oder eine zuordnende Lösung effektiver ist.

Meist ist die zuordnende Lösung schneller und es ist gar nicht notwendig zu zählen. Bereits aus der Abbildung kann erkannt werden (mit den Augen Element für Element zugeordnet), wie viele es mehr oder weniger sind.[3]

Bei einigen Aufgaben kann direkt aus der Anschauung ermittelt werden, dass beide Mengen die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

*Bei einer zuordnenden Lösung spricht man von einer **Eins-zu-Eins-Zuordnung**:*

Gleich viel ist es dann, wenn man jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuordnen kann. Kein Element bleibt übrig.

*Ist eine Menge **mehr**, dann gibt es ein oder mehrere Elemente, denen man in der anderen Menge **nichts** zuordnen kann. Diese andere Menge ist dann **weniger**.*

Um die Zuordnung in einer Zeichnung darzustellen, kann man die zu vergleichenden Elemente z. B. mit einem Strich verbinden oder einrahmen.

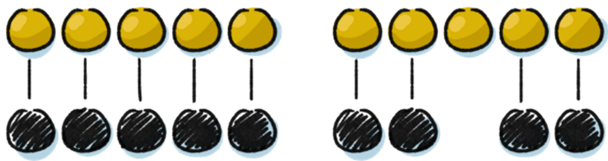


Abbildung 4.2-2 Visualisierung der Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Verbindungslinien

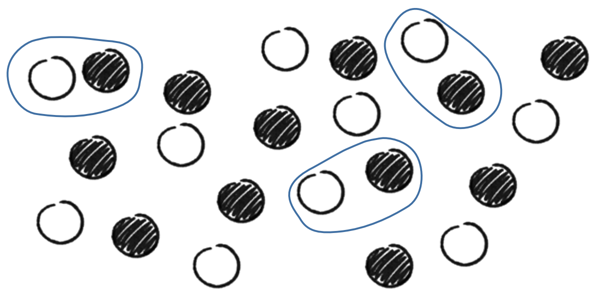


Abbildung 4.2-3 Visualisierung der Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Rahmen

Die Verbindungslinien oder Rahmen haben den Vorteil, den Überblick zu behalten, welche Elemente bereits zugeordnet wurden.

Werden die Anzahlen zählend bestimmt, ist es auch vorteilhaft, die bereits gezählten Elemente zu kennzeichnen, denn jedes Element wird genau einmal gezählt.

St 1

AUFGABENBLATT 4.2 b

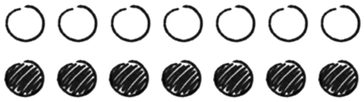
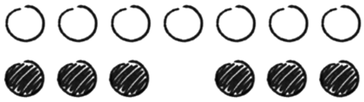
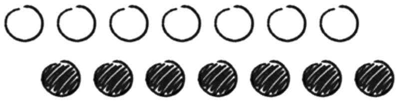
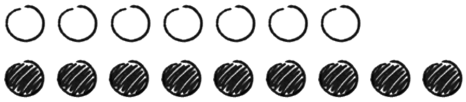
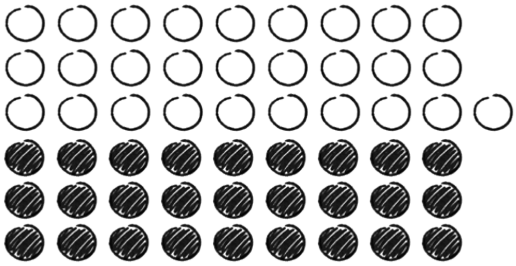
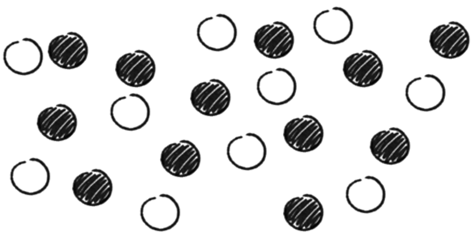
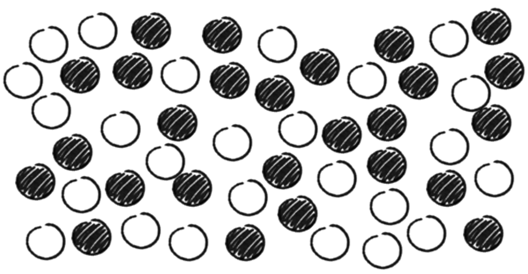
	Wie viele sind es mehr? Wie viele sind es weniger?	Vorgehensweise	Antwort
1		Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen.	Es sind gleich viele.
2		Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen.	Es ist ein weißer mehr. Es ist ein schwarzer weniger.
3		Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen (oder Verbindungslinien).	Es sind gleich viele.
4		Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen (oder Verbindungslinien).	Es sind zwei schwarze mehr. Es sind zwei weiße weniger.
5		Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Verbindungslinien.	Es ist ein weißer mehr. Es ist ein schwarzer weniger.
6		Zählend oder Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Rahmen (einen weißen und einen schwarzen jeweils einkreisen).	26 schwarze und 25 weiße. Es ist ein schwarzer mehr. Es ist ein weißer weniger. Oder habe ich mich verzählt? Achtung: Verzähl-Fehler, besonders, wenn die Mengen größer und unübersichtlicher werden.
7		Zählend oder Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Rahmen (einen weißen und einen schwarzen jeweils einkreisen).	Es sind zwölf schwarze und zehn weiße. Es sind zwei schwarze mehr. Es sind zwei weiße weniger.

Abbildung 4.2-4 Antworten Aufgabenblatt 4.2 b

Folgende Fragen und Aufgaben fassen die Unterrichtssequenz zusammen:

Die Kursleitung bittet einzelne Teilnehmer*innen, darauf zu antworten oder entsprechende Skizzen an die Tafel zu zeichnen.

Wenn man den Unterschied von zwei Mengen ermittelt, kann man bestimmen, wie viele es mehr bzw. weniger sind. Muss man dafür alle Elemente zählen? Formulieren Sie die Antwort an einem Beispiel und stellen Sie es dar.

Mögliche Antwort:

Nein, man kann den Unterschied der beiden Mengen mit einer Zuordnung – Eins-zu-Eins-Zuordnung – ermitteln. Dafür muss man nicht alle Elemente zählen.

Wie muss man fragen, damit man weiß, wie viele von z. B. weißen Vierecken im Vergleich zu schwarzen Vierecken mehr da sind? Gibt es weitere Fragemöglichkeiten? Erläutern Sie das an einem Beispiel.

Mögliche Antwort:

Wie groß ist der Unterschied? Wie viele weiße Vierecke sind es mehr? Um wie viele sind es mehr weiße als schwarze Vierecke?

Wie muss man fragen, wenn die Antwort lauten soll: Es sind vier schwarze Kreise mehr als weiße Kreise? Stellen Sie Ihre Antwort in einer Zeichnung dar.

Mögliche Antwort:

Wie groß ist der Unterschied? Wie viele schwarze Kreise sind es mehr? Um wie viele sind es mehr schwarze als weiße Kreise?

*Wie sieht ein Bild aus, auf dem drei weiße Kreise mehr als schwarze Kreise sind? Wie sieht das Bild aus, wenn Sie statt Kreisen Vierecke oder Dreiecke zeichnen?
Sind es dann auch drei weiße Vierecke/Dreiecke mehr? Warum ist das so?*

Mögliche Antwort:

Bei allen Vergleichen ist der Unterschied drei. Die Form der Elemente ist für den Unterschied egal.

*Zeichnen Sie ein Bild mit weißen und schwarzen Kreisen, bei dem sich die weißen und die schwarzen Kreise um vier unterscheiden.
Zeichnen Sie ein anderes Bild mit weißen und schwarzen Kreisen, bei dem sich die weißen und die schwarzen Kreise um vier unterscheiden.*

Mögliche Antwort:

Es ist egal, mit welcher Anzahl von Elementen ich den Unterschied darstelle. Bei zehn und sechs Elementen beträgt der Unterschied vier. Bei drei und sieben Elementen beträgt der Unterschied auch vier.

RÜCKSCHAU

Um Mengen exakt zu vergleichen, wird jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet. Danach kann festgestellt werden, wie viele Elemente in der einen Menge mehr vorhanden sind als in der anderen Menge. Entsprechend genauso viele Elemente sind in der anderen Menge weniger vorhanden. Mengen unterscheiden sich genau durch diese Anzahl der Elemente.

Die Anzahl, durch die sich zwei Mengen beim Anzahlvergleich unterscheiden, heißt Unterschied. Der Unterschied kann exakt mit einer Zahl ausgedrückt werden. Aus welcher Perspektive die Menge auch betrachtet wird – aus der der kleineren oder aus der der größeren Menge – die Zahl, die den Unterschied ausdrückt, ist gleich groß.

4.3 Seriation von Zahlen

EXPLORATION

Eine grundlegende Zahlbeziehung ist *einer mehr/um eins mehr* oder entsprechend *einer weniger/um eins weniger*. Entlang dieser Zahlbeziehung kann man den Aufbau der natürlichen Zahlen verstehen: Das Zahlsystem der natürlichen Zahlen ist nach dem Prinzip der Seriation um eins aufgebaut. Die nächste Zahl (der *Nachfolger*) ist einer/um eins mehr. Die vorangegangene Zahl (der *Vorgänger*) ist um eins weniger.

Das Beherrschen der Zahlwortreihe ist das eine. Um Zahlen richtig und bewusst miteinander zu verknüpfen, ist zusätzlich der Gedanke fundamental, dass nachfolgende natürliche Zahlen immer um eins größer sind. Umgekehrt sind vorangehende natürliche Zahlen immer um eins kleiner.

Das Wort *um* zu verwenden ist sinnvoll, aber nicht notwendig. Es bezieht den mathematischen Unterschiedsgedanken deutlicher ein.

4.3.1 Kursgespräch und Gruppenarbeit – Zahlbeziehungen und Seriation

Didaktische Ziele
- die Seriationslogik in der Zahlwortreihe erkunden (Der Nachfolger einer Zahl ist immer um eins mehr als die Zahl selbst. Der Vorgänger einer Zahl ist immer um eins weniger als die Zahl selbst.)
- die Seriation um 1 in Fragen wie „Was ist um 1 mehr als/um 1 weniger als“ anwenden

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen kennen die Zahlwortreihe und können zählen. Um rechnen zu lernen, reicht das aber nicht aus.

Es muss auf der Mengenebene verstanden werden, wie die Zahlreihe aufgebaut ist und daraus abgeleitet werden, welche Beziehungen zwischen den Zahlen bestehen. Ziel ist es, davon ausgehend zu abstrahieren, dass die Fünf aus fünf *Einsen* oder *Einern* aufgebaut ist, die Vier aus vier Einsen oder Einern. Das ist ein Einer weniger als fünf Einer. Deshalb ist die Vier einer weniger als die Fünf und die Fünf ist einer mehr als die Vier.

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, sich an einem Tisch (je nach Platzbedarf sollten mehrere Tische zusammengestellt werden) zusammenzufinden und gemeinsam Material zuzuordnen.

Es können Materialien wie Steckwürfel, Holzwürfel, Figuren, Chips, Fingerbilder, Würfelbilder, Karten u. ä. verwendet werden. Für die Übung werden Zahlkarten mit den Zahlen 1 bis 10 benötigt, die die Teilnehmer*innen auf bereitgelegten kleinen Karteikarten selbst beschriften.

Die Aufgabe für die Teilnehmer*innen lautet:

> *Ordnen Sie weitere Karten und verschiedene Materialien den Karteikarten mit den Zahlen (von 1 bis 10) zu.*
>
> *Finden Sie zu jeder Zahlkarte eine „Zuordnungsgruppe“ und ordnen Sie dafür jeder Zahl eine Mengen zu.*
>
> *Wenn Sie fertig sind, besprechen und vergleichen Sie gemeinsam die verschiedenen Zuordnungsgruppen.*

Die Kursleitung moderiert diesen Prozess mit Fragen.

> *Wodurch unterscheiden sich die Zuordnungsgruppen? Wo liegt jeweils einer mehr?*
>
> *Wo liegt jeweils einer weniger?*
>
> *Wie sollten die Zuordnungen am sinnvollsten angeordnet werden? Warum ist das sinnvoll?*

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, die Zuordnungen sinnvoll zu ordnen. Welche Möglichkeiten schlagen die Teilnehmer*innen vor:

- Es sind immer gleich viele.
- Es soll immer einer mehr sein.
- Es soll immer einer weniger sein.
- Oder andere?

Das Ordnungsprinzip „immer einer mehr" verdeutlichen zum Beispiel nachfolgende Abbildungen.

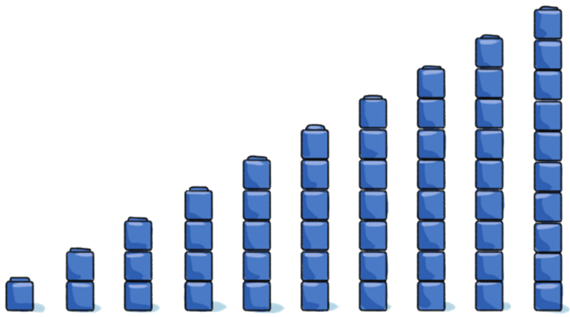


Abbildung 4.3-1 Mögliche Anordnung von Steckwürfeln – Immer einer mehr

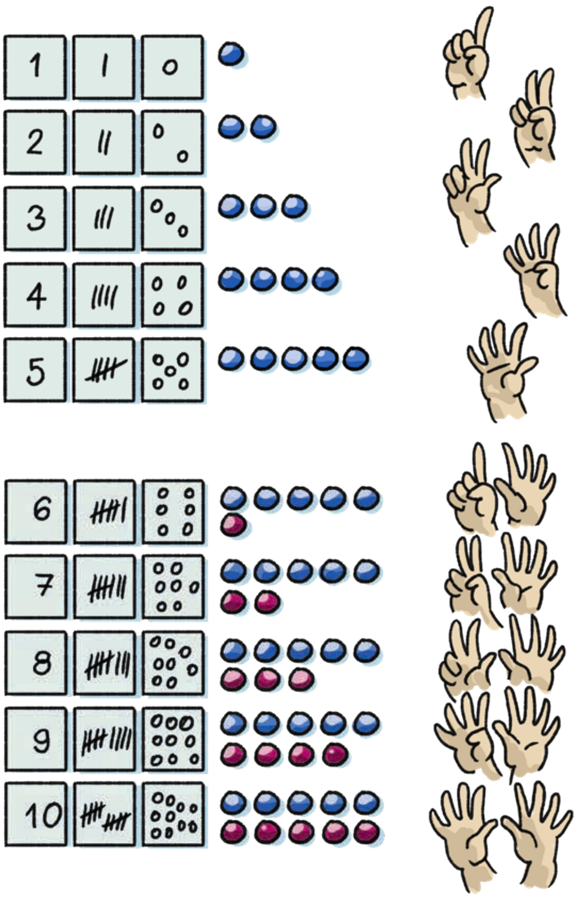


Abbildung 4.3-2 Mögliche Anordnung anderer Zählweisen – immer einer mehr.

Am Ende des aufsteigenden Ordnens der unterschiedlichen Materialien soll die Erkenntnis stehen: Es ist immer einer mehr, es kommt immer einer dazu.[4]

Entsprechend beim absteigenden Ordnen: Es ist immer einer weniger. Es wird immer einer entnommen.

Auch hier ist ein wesentlicher Aspekt des Kursgespräches, dass die Teilnehmer*innen dafür eigenständige Formulierungen finden.

Die Kursleitung fragt nach.

Wie kann man das gewählte Ordnungsprinzip beschreiben? Beschreiben Sie die Anordnung. Wie hat man die Mengen geordnet?

Mögliche Antwort:

Es kommt immer ein Element dazu. Es ist immer ein Element weniger. Es ist immer einer mehr/weniger.

Was fällt Ihnen auf?

Mögliche Antwort:

Alle Fünfermengen bestehen aus fünf Elementen. Dafür kann man die Zahl Fünf schreiben.

Gilt das für alle Zahlen?

Mögliche Antwort:

Zahlen stehen für die Anzahl der Elemente von Mengen.

Wofür steht z. B. die Zahl 8? – Auch weitere Fragen zu anderen Zahlen.

Mögliche Antwort:

Die Zahl 8 besteht aus acht Einern. Sie beschreibt alle Mengen mit acht Elementen.

Welche Zahl ist einer mehr/weniger als acht?

Mögliche Antwort:

Neun ist einer mehr als acht und sieben ist einer weniger als acht.

Gilt das genauso für acht Chips wie für acht Steckwürfel oder Bilder der Acht?

Mögliche Antwort:

Ja, das gilt für alle Achter-Mengen.

Jemand sagt: „Neun ist einer mehr als acht und sieben ist einer weniger als acht?" Gilt das immer oder kann es Situationen geben, in denen das nicht gilt?

Mögliche Antwort:

Das gilt immer. Neun ist immer einer mehr als acht und sieben ist immer einer weniger als acht.

Ausblick: Das führt weiter zum Thema Unendlichkeit. Wird immer ein weiterer Einer hinzugefügt, gibt es kein Ende. Auch für jede große Zahl gibt es immer eine größere.

HINWEIS

Steht für den Unterricht kein Material zur Verfügung, könnte die Aufgabe für die Gruppenarbeit darin bestehen, Zeichnungen anzufertigen, auf denen verschiedene Darstellungen der Zahlen eins bis zehn skizziert werden.

Entwickeln Sie verschiedene Visualisierungen, z. B. Kreise, Quadrate, Striche, auch Fingerbilder. Nutzen Sie Würfel oder andere Gegenstände, die sich ordnen lassen.

Die Kursleitung könnte dafür Beispiele an der Tafel vorgeben. Anschließend präsentieren alle Gruppen ihre Skizzen.

Die Kursleitung fasst an einem konkreten Beispiel zusammen.

BEISPIEL

Fünf ist immer einer weniger/um eins weniger als sechs. Fünf ist immer einer mehr/um eins mehr als vier.

Die Zahl 5 kann immer in fünf Einer zerlegt werden.

Diese Erkenntnisse gelten für alle Mengen, in denen sich fünf Elemente befinden und damit für die Zahl 5.

Die Zahl 5 repräsentiert alle Mengen mit fünf Elementen.

Die Zahl 5 ist abstrakt (ein Gedankenkonstrukt) und muss nicht mit einer konkreten Menge in Verbindung gebracht werden.

Dieses Beispiel sollte als Overhead-Folie oder mit einem Beamer für die Teilnehmer*innen sichtbar sein.

Anschließend fordert die Kursleitung einzelne Teilnehmer*innen auf, dieses Fazit auf andere Zahlen zu übertragen.

Drei ist immer einer weniger als vier.

Drei ist immer einer mehr als zwei.

Die Zahl 3 kann man immer in drei Einer zerlegen.

Diese Erkenntnisse gelten für alle Mengen, in denen sich drei Elemente befinden und damit für die Zahl 3.

Die Zahl 3 steht für *alle* Mengen mit drei Elementen.

Die Zahl 3 ist abstrakt (sie kann auch nur in Gedanken sein) und muss nicht für eine konkrete Menge stehen.

Um zu überprüfen, ob die Teilnehmer*innen sichere Kenntnisse zu folgenden Fragestellungen haben:

- Welche Zahl ist einer/um eins mehr als …?
- Welche Zahl ist einer/um eins weniger als …?

bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen sich hintereinander eine Frage und eine Zahl zu überlegen und diese der*dem Nachbar*in im Kursgespräch laut zu stellen. Ein*e Teilnehmer*in beginnt. Zum Beispiel so:

1 **Frage A:** Welche Zahl ist einer mehr als 4?
2 **Antwort A:** Es ist 5. Frage B: Welche Zahl ist einer weniger als 7?
3 **Antwort B:** Es ist 6. Frage: Welche Zahl ist einer mehr als 1?
…

*Man kann Zahlen durch das Prinzip „immer einer mehr“, „immer einer weniger“ in folgender Weise darstellen; dabei spricht man von **Seriation um eins** – die Zahlen gehen in Serie:*

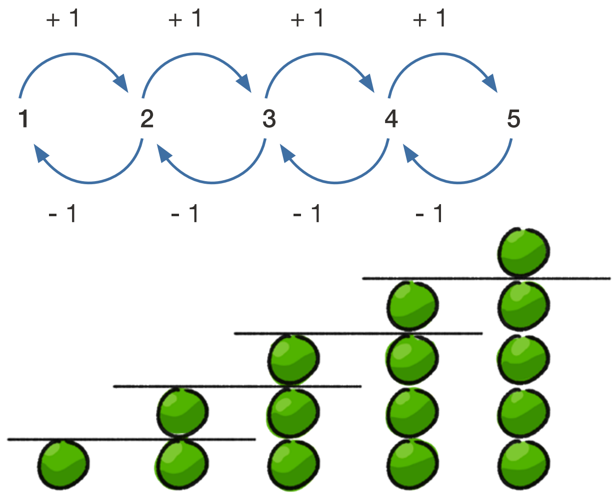


Abbildung 4.3-3 Natürliche Zahlen – Seriation um eins und Darstellung als Mengen – Immer einer mehr

Jeder Zahl folgt durch Addition von eins eine weitere Zahl.

Bereits vor der Schulzeit können die meisten Kinder zählen. Bei der aufsteigenden Zahlreihe unterscheiden sich die Zahlen immer um + 1. Das wird klar, wenn man die Zahlen als Anzahlen begreift.

$$1 = 1$$
$$2 = 1 + \boxed{1}$$
$$3 = 1 + 1 + \boxed{1}$$
$$4 = 1 + 1 + 1 + \boxed{1}$$
$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + \boxed{1}$$

Symbolisch kann man „einer mehr“ mit „+ 1“ angeben und „einer weniger“ mit „– 1“. Wenn n für eine Zahl steht, so ist n + 1 der Nachfolger und n – 1 der Vorgänger.

DEFINITION

Eine mögliche Definition natürlicher Zahlen lautet:

Die Zahlen 0, 1, 2, 3 … bilden die Menge der natürlichen Zahlen.

Die natürliche Zahl **n** ist eine Abstraktion von konkreten, endlichen Mengen mit **n** Elementen. Damit steht jede natürliche Zahl für eine Klasse gleichmächtiger Mengen.

Die so gewonnene Zahl heißt Kardinalzahl.

Da sich alle benachbarten natürlichen Zahlen um eins unterscheiden gilt folgende Abstraktion:

Der Nachfolger einer natürlichen Zahl **n** ist **n + 1**. Da jede natürliche Zahl einen Nachfolger hat, gibt es keine größte natürliche Zahl.

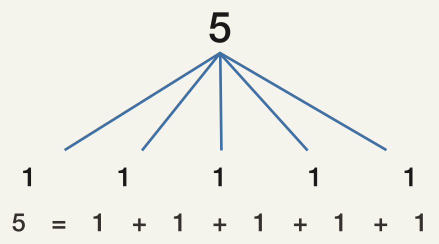
Mit Ausnahme von 0 hat jede natürliche Zahl einen Vorgänger **n – 1**.[5]

Um darüber zu sprechen, ist es günstig, diese Definition für alle sichtbar anzuzeigen (Overhead-Projektor, Beamer).

An dieser Stelle bietet es sich an, mit Hilfe von Materialien oder Abbildungen erneut den Zusammenhang zwischen (abstrakten natürlichen) Zahlen und Mengen darzustellen.

Das heißt allgemein: Jede Menge besteht aus n Elementen.

Die natürliche Zahl n steht für die Mächtigkeit jeder Menge, die aus n Elementen besteht. Die Mächtigkeit bezeichnet die Anzahl der Einer in der Menge. Das bedeutet, dass eine natürliche Zahl aus Einern besteht. Nachfolgend ist n = 5.



Statt zu sagen, dass in der Fünf immer fünf Einer enthalten sind, kann auch gesagt werden: Die Fünf besteht aus fünf Einern. Sie setzt sich aus fünf Einern zusammen.

Dafür kann geschrieben werden:
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Die Zahl 5 steht für die Mächtigkeit jeder Menge, die aus fünf Elementen besteht. Es sind Fünfer-Mengen.

Abbildung 4.3-4 Die Zahl 5 steht für beliebige Mengen mit fünf Elementen – Fünfer-Mengen

Gemeinsam mit den Teilnehmer*innen werden weitere Beispiele natürlicher Zahlen besprochen.

Stellen Sie eine Menge mit vier Elementen dar.

Können Sie zwischen einer Menge aus vier Elementen und der Zahl 4 unterscheiden?

Ist das (Zeichnung an der Tafel, z. B. ■ ■ ■ ■) eine Vierer-Menge? Wie viele Elemente sind in der Vierer-Menge enthalten?

Was wissen Sie über die Zahl 4?
Wie viele Einer sind in der Vier enthalten?
Welche Zahl ist der Nachfolger/Vorgänger der Vier?

4.3.2 Kursgespräch – Seriation um zwei, Seriation um x und Aufgabenblatt 4.3 a …mehr/weniger als

Didaktische Ziele
- einfache, geordnete Zahlenreihen/Serien erkunden, fortsetzen und eventuell selbst entwickeln
- Serien beschreiben und Zusammenhänge zwischen Zahlen versprachlichen

Folgende Frage soll diskutiert werden und mit Darstellungen an der Tafel illustriert werden.

Wenn es die Seriation um eins gibt, sind auch weitere Seriationen möglich? Zum Beispiel die Seriation um zwei:

Zwei mehr als drei sind fünf, zwei mehr als fünf sind sieben, zwei mehr als sieben sind neun. Deswegen sind drei zwei weniger als fünf, fünf sind zwei weniger als sieben und sieben sind zwei weniger als neun.

Die Zeichnungen an der Tafel erklären das.

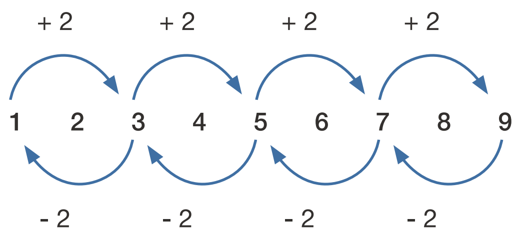


Abbildung 4.3-5 Natürliche Zahlen – Seriation um zwei

$\boxed{1} = 1$

$2 = 1 + 1$

$\boxed{3} = 1 \boxed{+ 1 + 1}$

$4 = 1 + 1 + 1 + \boxed{1}$

$\boxed{5} = 1 + 1 + 1 \boxed{+ 1 + 1}$

Abbildung 4.3-6 Natürliche Zahlen – Seriation um zwei

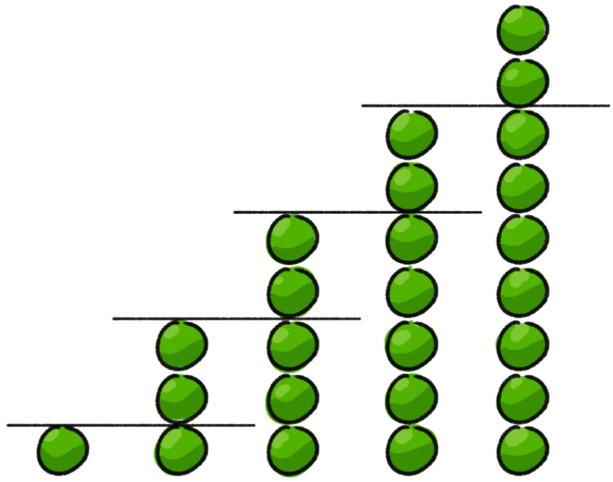


Abbildung 4.3-7 Seriation um zwei – Darstellung als Mengen – Immer zwei mehr

Die Serie „immer zwei mehr" kann man beliebig fortsetzen. Im oberen Beispiel beginnt die Serie bei eins.

Beginnt die Serie bei zwei, sind zwei mehr vier. Danach folgen sechs, acht, zehn, usw. Einfache, geordnete Zahlenreihen entstehen aus Seriationen.

BEISPIELE

Serie: Immer + 1
5, 6, 7, 8, 9, …

Serie: Immer – 1
9, 8, 7, 6, …

Serie: Immer + 2
2, 4, 6, 8, …

Serie: Immer – 2
9, 7, 5, 3, 1

Serie: Immer + 3
1, 4, 7, 10, …

Serie: Immer – 3
8, 5, 2

AUSBLICK

Wenn die Teilnehmer*innen selbstständig den Gedanken der Seriation aufnehmen möchten und weitere Zahlenreihen/Serien entwickeln wollen, auch über die Zehn hinaus, unterstützt die Kursleitung dieses Kursgespräch. Da die natürlichen Zahlen eine kleinste Zahl haben, enden absteigende Serien.

Die Kursleitung setzt zusammenfassend das **Aufgabenblatt 4.3 a** … *mehr/weniger als* ein. Dieses Aufgabenblatt ist auch zur Wiederholung für zu Hause geeignet. In der Selbstreflexion ist es für die Teilnehmer*innen wichtig zu erkennen, dass sie die in den Lücken gesuchten Zahlen routiniert finden und dass sie die Zusammenhänge versprachlichen können.

Nachdem das **Aufgabenblatt 4.3 a** ausgefüllt wurde, vergleichen die Teilnehmer*innen, jede*jeder für sich, die eigenen Antworten mit dem **Lösungsblatt 4.3 a.** Die Kursleitung überprüft den Lernstand der einzelnen Teilnehmer*innen. Je nachdem, wie der Vergleich der selbstständigen und vorgegebenen Lösungen ausfällt, entscheidet die Kursleitung, ob Formulierungen bzw. die Seriation erneut besprochen werden müssen.

RÜCKSCHAU

Grundsätzlich baut das Zahlsystem der natürlichen Zahlen auf der Seriation um eins auf. Der Vorgänger einer Zahl ist einer weniger als diese Zahl und der Nachfolger ist einer mehr als diese Zahl. Allgemein wird eine natürliche Zahl durch die Variable n ausgedrückt, deren Nachfolger durch $n + 1$ sowie deren Vorgänger durch $n – 1$.

4.4 Wie viele sind es mehr oder weniger?

EXPLORATION

Eine wichtige mathematische Fragestellung ist, wie bestimmt werden kann, wie viele es mehr sind oder wie viele es weniger sind.

Wenn es bei den vorangegangenen Themen um Formulieren, Zählen, Zuordnen, Sortieren, Vergleichen, Abstrahieren und Seriation ging, soll jetzt die mathematische Beziehung zwischen Zahlen, ausgedrückt durch die Addition und Subtraktion, erarbeitet werden.

Was haben die Addition und die Subtraktion mit dem Thema „Vergleichen" zu tun? Zwei Zahlen unterscheiden sich durch einen Wert – den Unterschied.

Wird zu der kleineren Zahl der Unterschied addiert, ergibt das die größere Zahl. Wird von der größeren Zahl der Unterschied subtrahiert, bleibt die kleinere Zahl übrig. Der Unterschied entspricht der Differenz beider Zahlen – auch Zahlendifferenz genannt.

4.4.1 Kursgespräch – Unterschiedliche Zahlen und Aufgabenblatt 4.4 a Wie viele sind es mehr oder weniger?

Didaktisches Ziel
mathematische Beziehungen zwischen zwei Zahlen als Addition oder Subtraktion ausdrücken, d. h. den Unterschied zwischen zwei Zahlen durch Hinzufügen oder Wegnehmen ausgleichen

Werden zwei Zahlen verglichen, sind sie entweder unterschiedlich oder gleich.

Hier sollen Zahlen betrachtet werden, die sich unterscheiden. Um wie viel unterscheiden sie sich? Dieses Thema gibt die Kursleitung für das nachfolgende Kursgespräch vor.

Zunächst geht die Kursleitung wiederholend auf Mengenbetrachtungen ein. Die nachfolgenden Abbildungen werden an der Tafel/mit einem Beamer dargestellt und erläutert. Immer wieder vergewissert sich die Kursleitung, ob die Teilnehmer*innen Fragen haben.

Bisher wurde zum Beispiel erarbeitet, dass sich fünf und drei um zwei unterscheiden. Werden Fünfer- und Dreier-Mengen verglichen, ist eine mögliche Visualisierung folgende:

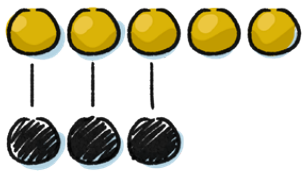


Abbildung 4.4-1 Vergleich einer Fünfer-Menge und einer Dreier-Menge – Unterschied zwei Elemente

Nach einer Eins-zu-Eins-Zuordnung kann für zwei Elemente der Fünfermenge keine Entsprechung in der Dreiermenge gefunden werden. Um diese zwei Elemente unterscheiden sich die Fünfer- und die Dreier-Menge, wenn die Anzahl der Elemente betrachtet wird.

Beide Mengen wären gleich groß, wenn sie entweder beide drei oder beide fünf Elemente enthalten würden.

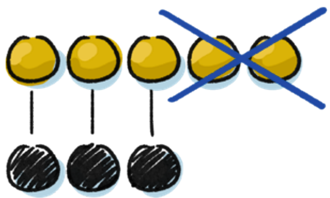


Abbildung 4.4-2 Zwei Elemente aus der Fünfer-Menge entfernen – Zwei Dreier-Mengen

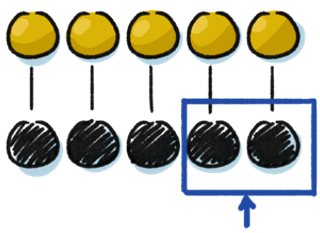


Abbildung 4.4-3 Zwei Elemente der Dreier-Menge zufügen – Zwei Fünfer-Mengen

Das heißt, entweder werden der Fünfer-Menge zwei Elemente entnommen oder zu der Dreier-Menge werden zwei weitere Elemente hinzugefügt. In beiden Fällen sind die Mengen nach der entsprechenden Handlung gleich groß.

EXKURS

Beide Mengen wären ebenfalls gleich groß, wenn sie zum Beispiel jeweils vier Elemente enthalten würden. Um das zu erreichen, müsste der Fünfer-Menge ein Element entnommen und der Dreier-Menge ein Element zugefügt werden. Als Gleichung ausgedrückt bedeutet das:

$5 - 1 = 3 + 1$

Die beiden mathematischen Ausdrücke (Terme) links und rechts vom Gleichheitszeichen beschreiben entsprechend die vorgenommene Handlung und stehen für 4.

Werden die oben beschriebenen Mengenhandlungen *symbolisiert*, gilt Folgendes:

$$5 > 3$$

$$1 + 1 + 1 \boxed{+ 1 + 1} > 1 + 1 + 1$$

Fünf unterscheidet sich von drei um zwei. In der Fünf sind zwei Einer mehr enthalten als in der Drei. Der Unterschied zwischen fünf und drei beträgt zwei.

Um die Ungleichung in eine Gleichung umzuwandeln, gibt es wie oben beschrieben zwei Möglichkeiten. Es wird dabei auch von *Ausgleichen* gesprochen:

Entweder von fünf zwei entnehmen. Dann entsprechen beide Seiten drei. Oder der Drei zwei hinzufügen. Dann entsprechen beide Seiten fünf.

$$5 > 3$$

$$5 - \boxed{2} = 3 \longrightarrow 3 = 3$$

$$5 = 3 + \boxed{2} \longrightarrow 5 = 5$$

Die Kursleitung erläutert ein weiteres Beispiel an der Tafel:

Man vergleicht zwei und sechs. Zwei ist kleiner als sechs. Vergleich: ***2 < 6***

In sechs sind vier Einer mehr als in zwei.

Einer: ***1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1***

Man kann ein Gleichheitszeichen setzen, wenn man entweder auf der linken Seite vier dazu gibt:

2 + 4 = 6

oder auf der rechten Seite vier wegnimmt:

2 = 6 − 4

Der Unterschied von Zwei und Sechs ist/beträgt ***vier***.

AUFGABENBLATT 4.4 a

Die Kursleitung erklärt das **Aufgabenblatt 4.4 a** *Unterschied* (auch an Beispielen) und bittet die Teilnehmer*innen, es zunächst selbstständig auszufüllen.

Wenn einem Teil der Gruppe unklar ist, wie die Aufgaben gelöst werden sollen, dann bespricht die Kursleitung beispielhaft weitere Aufgaben.

Setzen Sie das richtige Vergleichszeichen ein.			Verändern Sie die linke Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Verändern Sie die rechte Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Berechnen Sie den Unterschied.
a	>/</=	b			
3	>	1	3 − 2 = 1	3 = 1 + 2	2
7	<	9	7 + 2 = 9	7 = 9 − 2	2
6	<	10	6 + 4 = 10	6 = 10 − 4	4
1	<	5	1 + 4 = 5	1 = 5 − 4	4
5	<	8	5 + 3 = 8	5 = 8 − 3	3
9	>	6	9 − 3 = 6	9 = 6 + 3	3
4	<	5	4 + 1 = 5	4 = 5 − 1	1
7	>	1	7 − 6 = 1	7 = 1 + 6	6
2	<	4	2 + 2 = 4	2 = 4 − 2	2
0	<	7	0 + 7 = 7	0 = 7 − 7	7
8	>	3	8 − 5 = 3	8 = 3 + 5	5
10	>	2	10 − 8 = 2	10 = 2 + 8	8
4	=	4	4 +/− 0 = 4	4 = 4 +/− 0	0

4.4.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt 4.4b – Unterschied von Zahlen

Didaktisches Ziel
Unterschied bzw. Differenz zweier Zahlen durch Addition (Ergänzung) oder Subtraktion ermitteln

Der Wert, um den sich zwei Zahlen unterscheiden, wird auch als *Differenz* bezeichnet. Die Begriffe Unterschied und Differenz sind synonym.

Der Begriff *Differenz* stammt aus dem Lateinischen „differentia" und bedeutet Verschiedenheit. Es geht also um die Verschiedenheit der Zahlen.

Anhand des Zahlenvergleichs von 4 und 5 soll im Folgenden dargestellt werden, wie der Unterschied/die Differenz ermittelt werden kann. Die Kursleitung erläutert an der Tafel.

*Vier und fünf unterscheiden sich um eins, sie sind also um eins verschieden. Der **Unterschied** bzw. die **Differenz** beider Zahlen ist eins.*

Die Differenz oder den Unterschied von vier und fünf können Sie durch Subtraktion direkt berechnen. Dazu nimmt man die kleinere Zahl von der größeren Zahl weg und notiert:
5 − 4 = 1

Der Unterschied zwischen fünf und vier beträgt eins.

Die größere Zahl erhalten Sie, wenn Sie zu der kleineren den Unterschied dazugeben:
5 = 4 + 1

Oder anders ausgedrückt: Wenn Sie zu der kleineren Zahl den Unterschied dazugeben, erhalten Sie die größere Zahl:
4 + 1 = 5

Die kleinere Zahl erhalten Sie, wenn Sie von der größeren den Unterschied wegnehmen.
4 = 5 − 1

Oder anders ausgedrückt: Wenn Sie von der größeren Zahl den Unterschied wegnehmen, erhalten Sie die kleinere Zahl.
5 − 1 = 4.

RÜCKSCHAU

Über den Unterschied/die Differenz von eins können die *Zahlbeziehungen* von vier und fünf beschrieben werden.

Wie groß ist der Unterschied/die Differenz von vier und fünf? „eins".

5 − 4 = 1

Wie viele sind fünf mehr als vier? „eins".

5 = 4 + 1

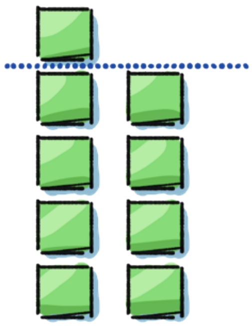
Wie viele sind vier weniger als fünf? „eins".

4 = 5 − 1

Vier und Fünf unterscheiden sich um „eins".

Der Unterschied zweier Zahlen kann durch Addition bzw. Subtraktion ermittelt werden.

Die Mengendarstellung belegt, dass sich fünf und vier *um eins* unterscheiden. [6]



5 > 4

Wird der größeren Menge die kleinere Menge entnommen, bleibt genau dieser Unterschied übrig.

Unterschied/ Differenz

5 − 4 = 1

Wenn zu der kleineren Menge der Unterschied dazugegeben wird, erhält man die größere Menge.

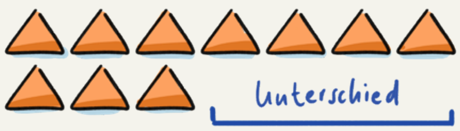
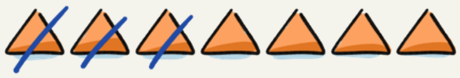
$4 + 1 = 5$

Wenn von der größeren Menge der Unterschied entnommen wird, erhält man eine kleinere Menge.

$5 - 1 = 4$

Zwei Zahlen unterscheiden sich um eine bestimmte Zahl. Das ist die Differenz/der Unterschied der beiden Zahlen. Der Unterschied von drei und sieben beträgt vier.

BEISPIEL

Mengendarstellung	Terme
	$3 < 7$
	$7 - 3 = 4$
	$3 + 4 = 7$
	$7 - 4 = 3$

In den vorangegangenen Abbildungen wurden die Zahlbeziehungen mit Mengendarstellungen illustriert.

Mittelfristiges Ziel des Kurses ist es, die Kenntnis über die Beziehungen der Zahlen für das Rechnen zu nutzen, ohne auf Mengenbetrachtungen zurückgreifen zu müssen.

AUFGABENBLATT 4.4 b

Das **Aufgabenblatt 4.4 b** *Unterschied von Zahlen* fasst die Unterrichtssequenz zusammen. Es eignet sich zur Teamarbeit in Zweiergruppen oder als Einzelarbeit. Ebenso kann es als Hausaufgabe dienen. In die mittlere Spalte der Tabelle wird eingetragen, welche Additions- und Subtraktionsaufgaben die Zahlbeziehungen der jeweiligen Zahlen angeben. In die rechte Spalte wird der Unterschied/die Differenz beider Zahlen eingetragen.

Aufgabe	Additions- und Subtraktionsaufgaben	Unterschied
Ermitteln Sie die Differenz von 7 und 5.	*7 − 5 = 2 5 + 2 = 7 7 − 2 = 5*	*2*
Wie groß ist der Unterschied von 3 und 10?	*10 − 3 = 7 3 + 7 = 10 10 − 7 = 3*	*7*
Wie viele sind zwei weniger als fünf?	*5 − 2 = 3 2 + 3 = 5 5 − 3 = 2*	*3*
Um wie viele sind fünf weniger als zwei?	*Fünf sind nicht weniger als zwei.*	*3*
Vergleichen Sie 9 und 7.	*9 − 7 = 2 7 + 2 = 9 9 − 2 = 7*	*2*
Wie viele sind eins mehr als acht?	*Eins ist nicht mehr als acht.*	*7*
Wie viele sind einer mehr als acht?	*Einer mehr als acht sind neun.* *8 + 1 = 9 9 − 1 = 8*	*1*
Um wie viele sind acht mehr als einer?	*8 − 1 = 7 1 + 7 = 8 8 − 7 = 1*	*7*
Um wie viele sind drei weniger als sechs?	*6 − 3 = 3 3 + 3 = 6 6 − 3 = 3*	*3*
Um wie viel unterscheiden sich 8 und 1?	*8 − 1 = 7 1 + 7 = 8 8 − 7 = 1*	*7*
Um wie viel ist fünf größer als zwei?	*5 − 2 = 3 2 + 3 = 5 5 − 3 = 2*	*3*
Um welche Zahl unterscheiden sich vier und neun?	*9 − 4 = 5 4 + 5 = 9 9 − 5 = 4*	*5*
Wie viel ist fünf kleiner als zehn?	*10 − 5 = 5 5 + 5 = 10 10 − 5 = 5*	*5*

Tabelle Lösungen für das Aufgabenblatt 4.4 b

RÜCKSCHAU

Um Mengen zu vergleichen – Mengen enthalten unterscheidbare Elemente – kann entweder zählend die Anzahl der Elemente bestimmt werden und entsprechend diese Anzahl verglichen werden oder durch Zuordnung ermittelt werden, wodurch sich die Mengen unterscheiden. Mit Zuordnung ist gemeint, dass jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet wird – *Eins-zu-Eins-Zuordnung*.

Bei einem *Vergleich* von Zahlen werden deren Beziehungen – *Zahlbeziehungen* – betrachtet und bestimmt, um wie viel sich die Zahlen unterscheiden oder ob sie gleich sind. Das kann durch die Zeichen <, >, = eindeutig ausgedrückt werden. Dabei sagen die Zeichen aus, ob eine Zahl größer als (>) oder kleiner als (<) die andere Zahl oder gleich (=) der anderen Zahl ist.

Um wie viel sich Zahlen unterscheiden, wird durch den Unterschied/die Differenz dieser Zahlen angegeben. Der Unterschied/die Differenz zweier Zahlen kann durch Subtraktion ermittelt werden: Von der größeren Zahl wird die kleinere Zahl abgezogen und übrig bleibt die Differenz/der Unterschied beider Zahlen. Wird dieser Unterschied zu der kleineren Zahl addiert, ergibt das die größere Zahl. Wird von der größeren Zahl der Unterschied subtrahiert, bleibt die kleinere Zahl übrig. Zum Verständnis von Zahlen führt, diese mit ihren Beziehungen zueinander zu denken:

BEISPIEL

Drei ist immer einer weniger/um eins weniger als vier. Vier ist immer einer mehr/um eins mehr als drei.

Diese Erkenntnis gilt für alle Mengen, in denen sich vier Elemente befinden und damit für die Zahl 4. Die Zahl 4 steht für alle Mengen mit vier Elementen. Die Zahl 4 ist abstrakt und muss nicht mit einer konkreten Menge in Verbindung gebracht werden. Die Zahl 4 kann immer in vier Einer zerlegt werden, so wie die Vierermenge immer in vier Einzelelemente zerlegt werden kann.

Das Zahlsystem der natürlichen Zahlen ist nach dem Prinzip der *Seriation um eins* aufgebaut, das heißt, dass zu jeder Zahl ein Einer hinzukommt und dass jede Zahl um eins mehr ist als ihr Vorgänger, entsprechend um eins weniger als ihr Nachfolger.

Auch mathematische Ausdrücke (Terme) können verglichen werden, zum Beispiel $5 - 1$ und $4 + 3$. Wird von fünf eins abgezogen, bleiben vier übrig. $5 - 1$ steht für vier. Werden zu vier drei dazugegeben, sind es zusammen sieben. $4 + 3$ steht für sieben. Da vier kleiner sieben ist ($4 < 7$), muss auch $5 - 1 < 4 + 3$ sein.

Der wesensbestimmende Bestandteil einer *Gleichung* ist das *Gleichheitszeichen*. Beide Seiten einer Gleichung können vertauscht werden, ohne dass sich die mathematische Aussage ändert.

Anders verhält es sich bei *Ungleichungen*. Beide Seiten des Vergleichs sind durch ein *Kleiner- oder Größer-Zeichen* verknüpft. Werden die Seiten von Ungleichungen vertauscht, kehrt sich das Vergleichszeichen um.

ENDNOTEN

1 Näheres vgl. Gaidoschik (2007/2015), S. 22 – 25.

2 Für die Formulierung *mathematischer Ausdruck* wird später der Fachbegriff *Term* eingeführt.

3 Die Teilnehmer*innen sollten die Eins-zu-Eins-Zuordnung in ihr Repertoire des Mengenvergleichs aufnehmen, um abzusichern, dass ihr Begriff von mehr und weniger wirklich ein mengenhafter ist und nicht lediglich die Idee umfasst, dass *mehr* dort ist, wo weiter gezählt werden muss.

4 Näheres vgl. Gaidoschik (2007/2015), S. 35 – 38.

5 vgl. z. B. Mathematik Basiswissen Schule, DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, 2005

6 Mengenhandlungen grafisch abzubilden ist nicht vollständig möglich. Besser ist, wenn die Situationen bzw. Handlungen mit beweglichen Mengenelementen konkret gezeigt werden. Insbesondere lässt sich mit beweglichen Mengenelementen nachvollziehbar verdeutlichen, warum in einer Vergleichssituation mit zwei vorliegenden Mengen die Subtraktion des Subtrahenden gleichgesetzt werden kann mit der Unterschied-Bestimmung: Es bleibt genau die Differenz „liegen"/übrig: Der Unterschied zwischen beiden Mengen ist genau die nach der Extraktion des Subtrahenden verbleibende Restmenge.

MENGEN UND ZAHLEN AUFTEILEN

5

5 MENGEN UND ZAHLEN AUFTEILEN

Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- Zahlen als Ganzes (als Gesamtes) verstehen, das aus (zwei oder mehr) Teilen zusammengesetzt ist
- Einsicht in die Prinzipien des Aufteilens von Gesamtmengen in Teilmengen gewinnen (Konstanz der Gesamtmenge bei gegensinniger Veränderung der Teilmengen)
- Verständnis für die Vielfalt möglicher Zusammensetzungen erarbeiten/festigen
- verschiedene Möglichkeiten erkunden, die Zahlen bis 10 zu zerlegen
- sämtliche Zahlzerlegungen automatisieren

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Anzahlen verstehen (Kardinaler Zahlaspekt ist Grundlage für das Verständnis von Zahlzerlegungen und Zahlbeziehungen. Werden Zahlen nämlich nicht als Mengen gedacht, sondern als Positionen, sind sie nicht in Teilmengen zerlegbar, Beziehungen zwischen Zahlen werden nicht erkannt.)
- Addition als Hinzufügen und Subtraktion als Wegnehmen verstehen (Wird die Addition als Vorwärts- und die Subtraktion als Rückwärtsschreiten in der Zahlwortreihe verstanden, fehlt die Grundlage für ein verständiges Handeln mit Gesamtmengen und Teilmengen.)
- Begriffe wie Gesamtmenge und Teilmenge kennen

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Das *kardinale* und das *relationale Zahlverständnis* bilden die Grundlage der rechnerischen Kompetenz.

Kardinalität entspricht der Anzahl der Elemente der Menge. Diese Anzahl ist eine natürliche Zahl *n*. Dabei wird auch von der Mächtigkeit einer endlichen Menge gesprochen. In einer Menge von acht Äpfeln ist die Mächtigkeit, die Anzahl oder die Gesamtheit acht. Das wird durch die Zahl Acht beschrieben. In der Menge dieser acht Elemente sind Teilmengen enthalten, dementsprechend sind in der Zahl Acht weitere Zahlen enthalten.

Im Folgenden wird für Anzahl auch von Gesamtheit, dem Gesamten oder der Gesamtmenge gesprochen. Es soll nämlich beschrieben werden, dass das *Gesamte* (die Gesamtheit, die Gesamtmenge) in *Teile* (Teilmengen) zerlegt werden kann. Zum Beispiel sind in der Gesamtmenge von acht Äpfeln auch Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln enthalten – die wiederum für sich Gesamtheiten sind.

Diese Mengenbetrachtung gilt für die Zahlbetrachtung gleichermaßen. Das heißt, in der Acht sind die Drei und die Fünf enthalten. Das Gesamte ist acht, ein Teil dieses Gesamten ist drei und der andere Teil ist fünf. Das ist eine Erkenntnis über die Zahlbeziehungen von drei, fünf und acht (relationales Zahlverständnis).

Für die Acht gibt es weitere Zahlbeziehungen. In der Acht sind neben der Drei und der Fünf ebenso auch die Sechs und die Zwei oder die Sieben und die Eins enthalten. Das deckt sich mit Aussagen aus den vorangegangenen Kapiteln: Die Zahlen bestehen im abstrakten Sinn aus Einern oder Einsen. Die Einer können wieder zu Zahlen zusammengefasst werden.

Wenn die Acht aus acht Einern besteht, können zwei Einer zur Zwei zusammengefasst werden, die restlichen sechs Einer können zur Sechs zusammengefasst werden. Demnach sind in der Acht die Sechs und die Zwei enthalten. Das heißt, die Acht kann in zwei und sechs zerlegt werden.

Fünf Einer der Acht könnten aber auch zur Fünf zusammengefasst werden und die restlichen drei Einer zur Drei. Demnach sind in der Acht auch die Fünf und die Drei enthalten usw.

Diese Betrachtungen funktionieren auf der Mengenebene, sollen aber im nächsten Lernschritt unabhängig von dem unmittelbaren Mengenbezug gleichermaßen auf der Zahlenebene gedacht werden können.

Den Teilnehmer*innen soll es gelingen, die Zahlen mit ihren Beziehungen untereinander abzurufen und als Gedankenkonstrukt nutzen zu können. Das ist das relationale Zahlverständnis.

Mit dem *Gesamten* und den *Teilen* lassen sich Mengenhandlungen vornehmen, aus denen Rechenoperationen ableitbar sind:

BEISPIEL

Die Teile können zu einem Gesamten zusammengefasst werden. Das Zusammenfassen wird durch die Addition beschrieben und durch „+" symbolisiert. Das heißt, die Teile Fünf und Drei werden zum Gesamten Acht zusammengefasst und mit einer Gleichung symbolisiert: 5 + 3 = 8.

Dem Gesamten können Teile entnommen werden. Wird vom Gesamten Acht die Drei entnommen, bleibt die Fünf übrig: 8 – 3 = 5.

Die Entnahme eines Teils kann auch in anderer Reihenfolge stattfinden. Der Acht kann auch die Fünf entnommen werden, dann bleibt die Drei übrig: 8 – 5 = 3.

Hierbei wird von Rechenoperationen[1] gesprochen: Dem Rechnen liegen (Mengen-)Handlungen zugrunde, auf der Symbolebene werden dementsprechend die Symbole sinnvoll verknüpft. Das Operieren mit Zahlen wird symbolisch nachvollziehbar und eindeutig in sogenannten Rechenaufgaben ausgedrückt.

Nach dem verstehenden Erarbeiten der Inhalte dieses Kapitels sollte es den Teilnehmer*innen möglich sein, die kardinalen Eigenschaften der Zahlen bis zehn über das Beschreiben der Zahlzerlegungen sowie über das Beschreiben von Zahlbeziehungen zu denken und mit Rechenoperationen auszudrücken.

Das schließt ein, z. B. die Zahl Fünf als Gesamtes zu verstehen, das aus fünf Einern besteht. Diese fünf Einer können jeweils zu verschiedenen Teilen der Fünf zusammengefasst werden: Die Teile sind zwei und drei; drei und zwei; eins und vier; vier und eins. Ebenso können die Teile z. B. zwei und zwei und eins sein.

Darüber hinaus kann auch die Null in diese Betrachtungen einbezogen werden. Dann kann mit weiteren Teilen agiert werden. Zum Beispiel mit den Teilen null und fünf. Anders ausgedrückt ist die Fünf auch in die Null und die Fünf zerlegbar. Die Null entspricht einer leeren Teilmenge.

Hervorgehoben werden sollten die Zahlbeziehungen zur Fünf und zur Zehn. Gaidoschik spricht von *geistigen Stützpunkten*.[2]

In der Tat sind die gewussten Beziehungen zur Fünf und zur Zehn fundamental: einerseits bezogen auf die Hände – eine Hand hat fünf Finger und beide Hände haben zehn Finger –, die geeignete Rechenhilfen darstellen, bevor die Zahlbeziehungen automatisch aus dem Gedächtnis abgerufen werden können. Entsprechend haben sich Visualisierungen bewährt, in denen die Fünf und die Zehn hervorgehoben werden (siehe Abakus, Zehnerfelder, Perlenketten mit jeweils fünf verschiedenfarbigen Perlen u. Ä.).

Andererseits liegt hier eine Vorstufe des Bündelungsgedankens, der die Basis des Dezimalsystems darstellt und leicht auf Zahlbereiche bis Hundert, Tausend usw. übertragen werden kann. Ein halbes Zehnerbündel sind fünf, zwei Fünfer sind ein Zehner, zehn Zehner bilden Hundert usw.

Das relationale Zahlverständnis im Zahlbereich bis zehn ist mitentscheidend dafür, ob die Teilnehmer*innen das Dezimalsystem verstehen lernen. Dieses relationale Wissen kann später auf größere Zahlen übertragen werden. Ziel dieses Kapitels ist es zum Beispiel, sieben als fünf und zwei zu denken, somit auch in der Lage zu sein, von sieben fünf (oder zwei) wegzudenken oder auch fünf und zwei zusammenzudenken.

Diese Gedanken lassen sich später auf mehrstellige Zahlen übertragen: Siebzig (Siebenhundert …) kann in fünfzig (fünfhundert …) und zwanzig (zweihundert …) zerlegt werden. Entsprechend sind fünfzig (fünfhundert …) und zwanzig (zweihundert …) zusammen siebzig (siebenhundert …).

Das Verständnis von Zahlen und das Verständnis der Rechenoperationen bedingen einander. Wenn die Zahlen nicht als Ganzes verstanden werden, das aus Teilen zusammengesetzt ist, kann auch nicht die Subtraktion als das Entnehmen solcher Teile von einem Ganzen und ebenso nicht die Addition als das Zusammenfassen solcher Teile zu einem Ganzen verstanden werden.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Eine hohe Hürde für die Teilnehmer*innen ist es, ihr Mengen- und Zahlenwissen, das häufig immer noch rudimentär ist, in ein allgemeineres Wissen über die Beziehungen der Zahlen zu überführen. Bereits im Kapitel *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 2) wurde zum kardinalen Zahlbegriff erarbeitet, dass Zahlen Anzahlen beschreiben. Um das zu verstehen, müssen die Lernenden erkennen, dass es bei Mengen eine Eigenschaft Anzahlhaftigkeit gibt, die mithilfe von Zahlen beschrieben wird. Im Kapitel *Mengen und Zahlen vergleichen* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 4) wurde der Aufbau der Zahlen nach dem Prinzip „immer einer mehr" erarbeitet. Dies wurde zu zwei mehr/zwei weniger und x mehr/x weniger erweitert. Im hier vorliegenden Kapitel 5 wird dieses Wissen um den Begriff der Zahlzerlegung erweitert.

Die Routinisierung der Zahlzerlegungen wird vielen Teilnehmer*innen dabei nur gelingen, wenn sie eine begriffliche Vorstellung davon haben, was Zahlzerlegungen sind. Bezüge zu dinglich vorhandenen oder imaginierten Mengen sollen sie dabei immer wieder herstellen können. Das betrifft strukturierte Mengendarstellungen, insbesondere Strukturierungen, die mit Bezügen zur Fünf und zur Zehn arbeiten. Diese können das Denken von Zahlen in ihren Beziehungen zueinander und damit auch das Erinnern dieser Beziehungen in Form von Zerlegungen erleichtern.

Immer wieder sollte den Teilnehmer*innen verdeutlicht werden, dass zum Rechnen ein kardinales Zahlverständnis und nicht ein zählendes (ordinales) erforderlich ist.

Mit einem ordinal dominierten Zahlverständnis gehen Zähler*innen davon aus, dass die Zahl Acht das achte Zählobjekt meint. Sie wissen nicht sicher, dass Acht alle acht Elemente, also die Anzahl, meint. Wenn eine Gesamtheit nicht als solche verstanden wird, dann gelingt es nicht, von dieser Gesamtheit auf andere zu schließen, also Mengenbeziehungen abzuleiten. Dementsprechend können dann auch Zahlbeziehungen nicht hergestellt werden. Es kann nicht verstanden werden, dass in der Acht die Fünf und die Drei enthalten sind, wenn in der Vorstellung mit der Zahl Acht das achte Element verbunden wird.

Manchen Teilnehmer*innen wird die Vielzahl von Begriffen verwirrend vorkommen:

Wann benutze ich Anzahl, wann Zahl, Gesamtes, Gesamtmenge, Gesamtheit?

Und wieso ist eine Teilmenge auch eine Gesamtheit, die ich wieder zerlegen kann? Wie kann ich denn überhaupt gedachte Zahlen zerlegen?

Eine eigene Ordnung in diesem komplexen Gedankenkonstrukt herzustellen, braucht oft viel Geduld, Motivation, Beharrlichkeit und Zeit. Einigen wird es schwer fallen, sich sprachlich auszudrücken, Rechenwege zu beschreiben, Zahlbeziehungen zu formulieren und Zusammenhänge zu begründen. Sie haben Zahlen oft noch nie so gedacht und damit nie experimentiert.

Immer wieder muss den Teilnehmer*innen verdeutlicht werden, dass Verstehen über Sprache funktioniert. Wenn etwas verstanden ist, kann es beschrieben werden. Es geht dabei nicht um Perfektion, sondern darum, eigene Worte für Zusammenhänge zu finden, denn über das Verständnis von Zusammenhängen bleibt das Gelernte nachhaltig im Gedächtnis. Das bedeutet für die Kursleitung, dass sie die Teilnehmer*innen immer wieder ermutigen und motivieren muss, die Rechenwege zu erläutern.

Manche Teilnehmer*innen werden Schwierigkeiten beim Visualisieren haben. Zahlzerlegungen können nicht direkt dargestellt werden. Wie soll das Zerlegen der als Zahlsymbol 8 aufgeschriebenen Zahl Acht dargestellt werden? Wird die Acht zerschnitten?

Die dafür genutzten Visualisierungen sind symbolisch gemeint. Auch an Mengenbildern kann die Zahlzerlegung sehr wohl abgebildet werden.

Ein erster Abstraktionsschritt ist, die an Objekten vorgenommenen Zahlzerlegungen (z. B. an Steckwürfeln) allgemeingültig darzustellen/zu visualisieren.

Ein weiterer Abstraktionsschritt ist, Mengenhandlungen mit Rechenoperationen zu verbinden und dafür eine geeignete Symbolschreibweise zu finden. Schwierigkeiten können umgekehrt auch dabei auftreten, Rechenoperationen mit Mengenhandlungen zu verbinden. Es muss also eingehend erarbeitet werden, wie die Addition und die Subtraktion visualisiert werden können.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Der kardinale Zahlbegriff wird im Kapitel *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* eingeführt (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 2).

Im Kapitel *Mengen und Zahlen verändern* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 3) wird erläutert, wie Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt Gleichungen in Mengenhandlungen überführt werden können. Addition bedeutet etwas hinzufügen und Subtraktion etwas entnehmen. Es wird sichtbar gemacht, dass ein Teil übrig bleibt, wenn aus Mengen ein Teil entnommen wird. Die Begriffe Gesamtmenge und Teilmenge sind eingeführt.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Michael Gaidoschik (2007/2015): Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien (8. Auflage). *Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.*
- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  - Zahlzerlegungen: Stufe 1, S. 39 ff.
  - Bezüge zur Fünf und zur Zehn: Stufe 1, S. 20 ff., S. 37 f., S. 39 ff.

  www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Moderationskarten
- Stifte
- Kreppband
- Steckwürfel
- Chips
- Holzsteine
- Karten 1–10
- Fingerbilder
- andere Darstellungen der Zahlen …

5.1 Gesamtes und Teile

EXPLORATION

Es wird geklärt, dass unter dem Begriff *Gesamtmenge* etwas Gesamtes/Umfassendes verstanden wird. Von dem *Gesamten* können ein Teil oder mehrere Teile entnommen werden. Die Teile können wiederum zum Gesamten zusammengefügt werden. Dabei darf allerdings nichts verloren gehen. Sonst ergibt es nicht mehr das Gesamte, das ursprünglich in Teile zerlegt wurde.

In einer Menge von beispielsweise acht Äpfeln ist die Anzahl/die Gesamtheit/das Gesamte acht. Dafür steht die Zahl 8. Diese Menge von insgesamt acht Äpfeln kann unterschiedlich aufgeteilt werden. Zum Beispiel in die Teilmenge von drei Äpfeln und in die Teilmenge von fünf Äpfeln. Es wäre auch möglich, in die Teilmengen von sechs und zwei Äpfeln aufzuteilen. Oder in drei Teilmengen von jeweils zwei und zwei sowie vier Äpfeln.

Wenn die Teilmengen wieder zusammengefügt werden, liegt erneut die Gesamtmenge vor.

Wie ist es, wenn dieser Zusammenhang auf Zahlen übertragen wird? Gibt es hier auch Gesamtes und Teile? Die Teilnehmer*innen lernen, einerseits von Mengen auf Zahlen zu schließen. Ebenso wie bei der Mengenbetrachtung der acht Äpfel, kann die Zahl Acht in die Drei und die Fünf zerlegt werden. Oder auch in die Sechs und die Zwei. Oder sogar in zwei Zweien und die Vier. Andererseits lernen die Teilnehmer*innen aus dem Zusammendenken von Einern oder Einsen auf die Teile der Zahlen zu schließen.

Bei Zahlen wird von Zahlzerlegungen gesprochen. Eine Zahl wird in Teile zerlegt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Zahlen zu zerlegen. Der Null kommt dabei eine besondere Rolle zu. Auch die Null kann als Teil einer Zahl betrachtet werden.

5.1.1 Vortrag – Gesamtes und Teile auf Zahlen übertragen

Didaktisches Ziel
Einsichten in die wesentlichen Zusammenhänge vom Gesamten und seinen Teilen gewinnen (z. B.: Die Teile können unterschiedlich groß oder gleich groß sein. Werden die Teile zusammengefügt, ergibt sich wieder das Gesamte. Wird vom Gesamten ein Teil weggenommen, bleibt der andere Teil/bleiben andere Teile übrig. Ist eine Teilmenge leer, also Null, entspricht die andere Teilmenge dem Gesamten.)

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung erläutert, dass es in diesem Unterrichtsteil darum geht, die Formulierungen *Gesamtes* und *Teile* auf Zahlen zu übertragen.

*Etwas Gesamtes ist etwas Umfassendes. Zum Beispiel die Gesamtheit aller Schüler*innen einer Schule. Wenn ich den Begriff* ***das Gesamte*** *erklären will, nutze ich bereits weitere Begriffe. Bei Erklärungen sucht man nach anderen Begriffen oder Beschreibungen.*

Hier geht es zum Beispiel um ***alle*** *Schüler*innen einer Schule. Das Wort alle beschreibt die Gesamtheit. Das heißt, ich habe jetzt für* ***das Gesamte*** *die Wörter* ***alle***, ***Umfassendes*** *und* ***Gesamtheit*** *benutzt.*

*Bleiben wir bei dem Beispiel Schule. Dabei könnte man die Frage stellen: Wie viele Schüler*innen lernen insgesamt in der Schule? Ein weiteres Wort kommt dazu:* ***insgesamt***.

*Manchmal wird auch nach der Schulgemeinschaft gefragt. Das heißt, hier benützt man das Wort Schulgemeinschaft für das Gesamte. Es interessiert zum Beispiel die Schulverwaltung, wie viele von der gesamten Schulgemeinschaft Lehrer*innen oder Schüler*innen sind.*

*Zu einem Teil besteht die Schulgemeinschaft aus Schüler*innen und zu einem anderen Teil aus Lehrer*innen. Die Gesamtheit besteht aber aus noch mehr Teilen: Sekretär*innen, Hausmeister*innen, Honorarkräften, Reinigungspersonal, Küchenpersonal, etc. Für die Gesamtheit darf niemand beim Zählen vergessen werden.*

Die Schulgemeinschaft kann man auch in andere Teile einteilen. Hier sind einige Beispiele:

*Brillenträger*innen und Nicht-Brillenträger*innen. Klingt erstmal eindeutig – In welche Gruppe gehören aber die Kontaktlinsenträger*innen?*

*Fahrradfahrer*innen, Busnutzer*innen, Fußgänger*innen – Schulgemeinschaft in drei Teile eingeteilt. Was ist aber z. B. mit Skater*innen oder denjenigen, die mit dem Auto kommen?*

*Jahrgangsstufen – hier werden dann nur die Schüler*innen erfasst.*

Die Jahrgangsstufen kann man noch genauer einteilen: Klassen – zum Beispiel: drei siebente Klassen, jeweils zwei achte, neunte und zehnte Klassen. Wie viele Teile bekommt man bei dieser Einteilung?

*Bei einer Befragung für das Essen in der Schule bekommt man auch Teile der gesamten Schulgemeinschaft: Veganer*innen, Vegetarier*innen, Helal-Esser*innen, Koscher-Esser*innen, Alles-Esser*innen, Zuhause-Esser*innen, Allergiker*innen ... Und sind damit wirklich schon alle erfasst?*

Einteilen ist nicht immer einfach, oft braucht es mehr Kategorien, als man vorher denkt – die Welt ist bunt und vielfältig.

Weitere Beispiele für Teile der Schulgemeinschaft könnten durch die Teilnehmer*innen aufgezählt werden:

- Volljährigkeit
- Mitarbeit in AGs
- Mehrsprachigkeit usw.

Die Kursleitung lenkt die Aufmerksamkeit der Teilnehmer*innen auf folgende Aspekte:

- Eher selten sind die einzelnen Teile gleich groß.
- Werden die Teile zusammengefügt, ergibt sich das Ganze.
- Wird der Schulgemeinschaft ein Teil entnommen, bleibt ein Teil/bleiben andere Teile übrig.

Nachfragen wie:

Stimmen diese Aussagen? Warum ist das so? Können Sie das erklären?

sollen zu einem wesentlichen Aspekt dieses Kapitels führen:

Das Gesamte besteht aus Teilen, die unterschiedlich groß sein können. Diese Teile kann man zu dem Gesamten zusammenbringen. Wenn man einen Teil von dem Gesamten wegnimmt, bleibt mindestens ein Teil übrig.

Mit der Frage, wie es sich darstellt, wenn ein bestimmter Teil in dieser Schule nicht vorhanden ist, wird bereits auf die besondere Bedeutung der Null vorbereitet.

- In einer Schule für Jungen lernen keine Mädchen. Das heißt, die Schulleitung trägt in den Fragebogen der Schulverwaltung unter „Anzahl Mädchen“ eine Null ein.
- In manchen Schulen nutzt die Schulgemeinschaft nicht den Bus. Auch hier müsste eine Null eingetragen werden.
- Manchmal entfällt eine Jahrgangsstufe.

Die Kursleitung formuliert zusammenfassend:

Ein bestimmter Teil kann also nicht vorhanden sein. Dieser Teil ist leer. Diese Teilmenge enthält keine Elemente.

5.1.2 Gruppenarbeit – Begriffe Gesamtes und Teile

Didaktisches Ziel
synonym verwendete Begriffe für das Gesamte und die Teile kennenlernen und sammeln (als Grundlage für ein Wiedererkennen des Teile-Ganzes-Prinzips in Alltagssituationen und in mathematischen Anwendungen)

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 5.1 a

Die Kursleitung verteilt an die Teilnehmer*innen Moderationskarten, auf denen Begriffe stehen, und bittet die Teilnehmer*innen, die Moderationskarten unter den Begriffen *das Gesamte* und *die Teile* anzuordnen. Eine Druckvorlage befindet sich auf dem **Aufgabenblatt 5.1 a** *Begriffe Gesamtes und Teile* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten).

Um die Moderationskarten zum Beispiel an den Wänden des Unterrichtsraumes zu befestigen, eignet sich Kreppband.

Möglicherweise finden die Teilnehmer*innen weitere Begriffe, die zu den beiden Oberbegriffen passen. Damit können leere Moderationskarten beschriftet werden.

Synonym verwendete Begriffe – das Ganze und die Teile:

Das Ganze	Die Teile
Das Gesamte	Anteile
Ganzheit	Teil
Gesamtmenge	Teilmengen
Gesamtheit	Stücke
Alle/alles zusammen	Bruchstücke
Das, was da ist …	Ein Teil von dem …
Umfassend	Nicht alles
100 Prozent	30 Prozent, 2 Prozent
Vollständig	Unvollständig
Ausnahmslos	Ein bisschen
Zusammengesetztes	Etwas
Zerlegbares	

Wenn diese Begriffe für alle sichtbar im Unterrichtsraum angebracht werden, kann die Kursleitung in den nächsten Lernschritten darauf verweisen. Es können im Unterrichtsverlauf weitere passende Begriffe ergänzt werden.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

Verschiedene Begriffe können synonym für *das Gesamte* und *die Teile* verwendet werden.

5.1.3 Vortrag und Einzelarbeit – Veränderung der Teilmengen ohne Veränderung der Gesamtmenge

Didaktisches Ziel
Einsicht in das Prinzip der „Konstanz der Gesamtmenge bei gegensinnigem Verändern der Teilmengen“ gewinnen (d. h. wird ein Element von der einen Teilmenge in die andere Teilmenge verschoben, ändert sich die Gesamtmenge nicht)

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen sollten zunächst darauf aufmerksam werden, dass es bei Mengenbetrachtungen um die Anzahl der Elemente einer Menge geht und nicht um die Art der Elemente (zum Beispiel Äpfel oder Wendeplättchen).

Wie verändert sich das Gesamte, wenn die Teile verändert werden?

Hier soll folgende Erkenntnis erarbeitet werden: Wird zunächst ein Element der einen Teilmenge in die andere Teilmenge verschoben, ändert sich die Gesamtmenge nicht.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Teilnehmer*innen haben Wendeplättchen vor sich liegen.

Abbildung 5.1-1 Wendeplättchen

Die Kursleitung hält einen Vortrag und zeigt die nachfolgenden Abbildungen als Overhead-Folien oder als Präsentation mit einem Beamer.[3]

Auf der ersten Folie sieht man Äpfel.

Eine Gesamtmenge von acht Äpfeln enthält Teilmengen von z. B. drei und fünf Äpfeln.

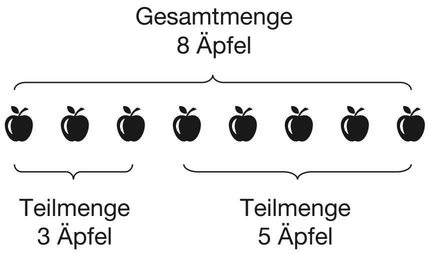


Abbildung 5.1-2 Gesamtmenge von acht Äpfeln mit Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln

Bitte überprüfen Sie mit Wendeplättchen, ob in der Gesamtmenge von acht Wendeplättchen die Teilmenge von drei und die Teilmenge von fünf Wendeplättchen enthalten sind.

Wie können Sie das machen? Probieren Sie es aus.

Meine Lösung wäre: Acht Wendeplättchen so legen, dass Rot nach oben zeigt. Drei Wendeplättchen umdrehen. Vor mir liegen jetzt drei blaue Wendeplättchen und fünf rote Wendeplättchen. Die Gesamtmenge von acht Elementen (Wendeplättchen) enthält die Teilmengen von drei Elementen (blaue Wendeplättchen) und von fünf Elementen (rote Wendeplättchen). Es ist wie in dem Bild mit den Äpfeln. Die Gesamtmenge von acht Elementen (Äpfeln) enthält die Teilmengen von drei und fünf Elementen.

Verschieben Sie ein Element von der einen Teilmenge in die andere. Die Gesamtmenge verändert sich nicht. Drehen Sie ein blaues Wendeplättchen um. Jetzt liegen vor Ihnen die Teilmengen von zwei blauen Plättchen und sechs roten Plättchen. Das heißt, Sie haben ein Plättchen der blauen Dreiermenge in die rote Fünfermenge verschoben. Es sind jetzt eine blaue Zweiermenge und eine rote Sechsermenge. Insgesamt bleiben es aber acht Elemente (Wendeplättchen).

Wenn die Kursleitung bemerkt, dass Teilnehmer*-innen Schwierigkeiten haben, wenn vom Verschieben von Mengenelementen die Rede ist, aber auf der Materialebene lediglich Plättchen umgedreht werden, dann wird die gesamte Betrachtung (auch, dass 8 aus 5 und 3 oder 6 und 2 besteht) noch einmal mit Chips durchgeführt. Dabei bietet es sich an, dass die Teilmengen voneinander separiert gelegt werden. Die Teilnehmer*innen sehen, dass immer über die Gesamtmenge aus acht Elementen gesprochen wird.

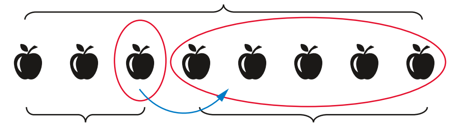


Abbildung 5.1-3 Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

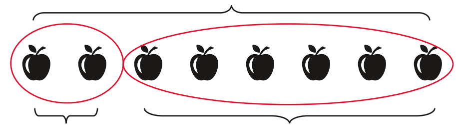


Abbildung 5.1-4 Gesamtmenge von acht Äpfeln mit Teilmengen von zwei Äpfeln und sechs Äpfeln

Jetzt sind es eine Zweier- und eine Sechser-Teilmenge. Die Gesamtmenge hat sich nicht verändert.

Die Kursleitung formuliert die Behauptung:

Verschiebt man eine beliebige Anzahl von einer Teilmenge in die andere Teilmenge, so verändert sich die Gesamtmenge nicht.

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen zu weiteren Veränderungen der Teilmengen auf:

Drehen Sie jetzt von der roten Sechser-Menge (sechs rote Wendeplättchen) fünf um! Was passiert mit den Teilmengen der roten und blauen Wendeplättchen?

Die Kursleitung beobachtet, ob alle Teilnehmer*innen diese Anweisung richtig nachvollziehen. Eine mögliche Antwort der Teilnehmer*innen könnte lauten:

Jetzt ist es eine Siebener-Teilmenge (blaue Wendeplättchen) und eine Einer-Teilmenge (rote Wendeplättchen). Zusammen sind es immer noch acht Chips.

Drehen Sie von den sieben blauen Plättchen drei Plättchen um! Was passiert, wenn Sie von der Siebener-Teilmenge drei Elemente zu der Einer-Teilmenge verschieben?

Eine mögliche Antwort könnte lauten: Jetzt sind es zwei Vierer-Teilmengen.

Bitte drehen Sie die Wendeplättchen so, dass alle eine Farbe haben. Können Sie die acht Wendeplättchen auch in mehr als zwei Teilmengen zerlegen? Und wenn ja, zeigen Sie das an einem Beispiel. Zerlegen Sie die Achter-Menge in Teilmengen.

Die Teilnehmer*innen haben jetzt im Idealfall verschiedene Teilmengen vor sich liegen:

BEISPIELE
4/2/2, 6/1/1, 2/2/2/2, …, 1/1/1/1/1/1/1/1

Bitten Sie am Ende dieser Aufgaben die Teilnehmer*-innen, die Teilmengen wieder zur Gesamtmenge zusammenzufügen.

Was können Sie aus den Aufgaben herausfinden? Beschreiben Sie, wie man eine Gesamtmenge in Teilmengen zerlegen kann. Wie kann man diese Teilmengen wieder zu der Gesamtmenge zusammenbringen?

Wie viele Teilmengen kann eine Gesamtmenge haben?

Sind diese Teilmengen gleich groß?

Beschreiben Sie, wie sich die Gesamtmenge verändert, wenn man Elemente der einen Teilmenge zu der anderen Teilmenge verschiebt.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Eine Gesamtmenge kann in verschieden große Teilmengen oder auch in gleich große Teilmengen zerlegt werden.
- Eine Gesamtmenge kann in mehr als zwei Teilmengen zerlegt werden.
  Möglicherweise kommt hier bereits ein Einwand: Eine Zweier-Gesamtmenge kann nur in zwei Teilmengen zerlegt werden.

EXKURS

Es bietet sich an, an dieser Stelle die Zahl Null zu thematisieren. Wird die Teilmenge Null betrachtet, ist diese leer. Eine Mengenhandlung könnte sein, dass die Zweier-Gesamtmenge in zwei Einer-Mengen und eine (oder mehrere) weitere leere Mengen geteilt wird. Als Handlungsbeispiel könnte dienen: Zwei Bonbons werden von drei Personen geteilt. Eine Person bekommt kein Bonbon.

- Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.
- Alle Teilmengen können wieder zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden.

Es ist wichtig, dass alle Teilnehmer*innen die genannten Mengenhandlungen mit unterschiedlichen Elementen nachvollziehen können. Geeignet sind Steckwürfel oder andere Gegenstände. Wendeplättchen haben einen visuellen Vorteil, indem durch Umdrehen sofort ersichtlich wird, welche Teilmengen (rot und blau) in der Gesamtmenge enthalten sind. Die jeweilige Aufteilung der entsprechenden Teilmenge wird farblich deutlich werden. Die Wendeplättchen eignen sich besonders für das Veranschaulichen von Zerlegungen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen.

Bei Übungen mit Material geht es darum, die Teilnehmer*innen auf die Zahlzerlegungen vorzubereiten, denn ihre Aufgabe wird es anschließend sein, sich selbstständig mithilfe von Wendeplättchen, Steckwürfeln, Chips oder anderen Materialien die Zahlzerlegungen zu erarbeiten.

Je nach Mitarbeit und Kenntnisstand der Teilnehmer*innen entscheidet die Kursleitung, ob noch weitere Übungen durchgeführt werden.

BEISPIEL
Zehn Wendeplättchen in vier rote und sechs blaue aufteilen. Von den roten Plättchen drei umdrehen. Jetzt ist die Gesamtmenge von zehn Wendeplättchen in die Teilmengen neun blaue und ein rotes Wendeplättchen aufgeteilt.

5.1.4 Gruppenarbeit – Gegensinnige Veränderungen der Teilmengen

Didaktisches Ziel
Einsicht in das Prinzip der Konstanz der Gesamtmenge bei gegensinnigem Verändern der Teilmengen vertiefen (durch Sammeln und Systematisieren sämtlicher Möglichkeiten, aus Gesamtmengen verschiedene Teilmengen zu bilden)

EXPLORATION

Hier geht es um das gegensinnige Verändern der Teilmengen und darum, dass die Teilnehmer*innen möglichst selbst erkennen, dass sich dabei die Gesamtmenge nicht verändert.

Gegensinniges Verändern heißt zum Beispiel: Eine Teilmenge wird um eins weniger, dafür die andere Teilmenge um eins mehr.

Eine weitere wichtige Erkenntnis ist, dass sich bei einer Gesamtmenge von neun Elementen zehn verschiedene Möglichkeiten der Zerlegung in zwei Teilmengen ergeben.

Die Kursleitung systematisiert diese Erkenntnis, indem sie die Teilnehmer*innen bittet herauszufinden, wie viele Möglichkeiten, verschiedene Teilmengen zu bilden, es bei zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht oder zehn Wendeplättchen gibt.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, neun Wendeplättchen vor sich auf den Tisch zu legen. Die Oberseite der Wendeplättchen hat bei allen die gleiche Farbe.

Schritt für Schritt drehen die Teilnehmer*innen ein Wendeplättchen nach dem anderen um. Zwischen den Schritten sollten die Teilnehmer*innen den Ausführungen der Kursleitung zuhören.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgende Abbildung und erläutert.

Vor Ihnen liegen neun Wendeplättchen einer Farbe. Das zeigt diese Abbildung mit weißen Kreisen.

Wenn man jetzt Schritt für Schritt je ein Wendeplättchen umdreht, dann ändern Ihre Wendeplättchen jeweils die Farbe.

In der Abbildung sehen Sie dafür eine Änderung der weißen Kreise in rote Kreise. Im ersten Schritt besteht die Teilmenge rot aus null Elementen. Die Teilmenge weiß besteht aus neun Elementen. Im zweiten Schritt: ein roter Kreis und acht weiße Kreise.

Im dritten Schritt: zwei rote Kreise und sieben weiße Kreise. Usw.

Die Teilmenge der weißen Kreise wird immer einer weniger. Die Teilmenge der roten Kreise wird immer einer mehr.

Bei Ihren Wendeplättchen nimmt eine Farbe um eins ab und die andere Farbe um eins zu.

Wenn man jetzt alle Schritte darstellt, dann bekommt man das Bild dieser Abbildung.

Erklären Sie bitte, welche Muster Sie entdecken und wie Sie diese Muster beschreiben können.

	Gesamtmenge 9	Teilmenge rot	Teilmenge weiß
1.	○○○○○○○○○	0	9
2.	●○○○○○○○○	1	8
3.	●●○○○○○○○	2	7
4.	●●●○○○○○○	3	6
5.	●●●●○○○○○	4	5
6.	●●●●●○○○○	5	4
7.	●●●●●●○○○	6	3
8.	●●●●●●●○○	7	2
9.	●●●●●●●●○	8	1
10.	●●●●●●●●●	9	0

Abbildung 5.1-5 Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

Die nächste Abbildung fasst die Erkenntnisse der Unterrichtssequenz zusammen und wird den Teilnehmer*innen gezeigt. Dabei bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen, dass jeder Satz durch eine*n Teilnehmer*in vorgelesen wird und jeweils mit einem Beispiel belegt wird.

ZUSAMMENFASSUNG

GESAMTMENGEN UND TEILMENGEN

Eine Gesamtmenge kann in verschieden große Teilmengen oder auch in gleich große Teilmengen zerlegt werden.

Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.

Eine Gesamtmenge kann in mehr als zwei Teilmengen zerlegt werden.

Die Teilmengen können zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Es gibt viele Begriffe für *das Gesamte* und *die Teile* (siehe Abschnitt 5.1.2). Sie spiegeln mit anderen Worten wider, was mit dem Gesamten und den Teilen gemeint ist. Alles wird in Einzelnes aufgeteilt.
- Das Gesamte kann in zwei und mehr Teile zerlegt werden. Die Teile müssen nicht gleich groß sein.
- Diese Teile können wieder zu dem Gesamten zusammengeführt werden. Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.

vhs Lernportal

Rechnen lernen

vhs-lernportal.de / rechnen

kostenfrei – jederzeit – an jedem Ort

ein Projekt des Deutschen Volkshochschul-Verbands e. V.

AlphaDekade 2016 – 2026

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

5.2 Zahlzerlegungen

5.2.1 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gegenstände, Zahl/Anzahl, Einer

Didaktisches Ziel
die Begriffe *Menge*, *Zahl/Anzahl*, *Einer* und *Gesamtmenge* wiederholen, sofern noch begriffliche Schwierigkeiten bestehen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 5.2 a

Je nach Kenntnisstand der Gruppe wiederholt die Kursleitung mithilfe des **Aufgabenblattes 5.2 a** *Anzahl und Einer* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) den Zusammenhang zwischen Mengen, Zahlen/Anzahlen und Einern.

Die Kursleitung entscheidet, inwieweit das notwendig ist. Es kann bereits genügen, eine Aufgabe gemeinsam zu besprechen. Die erste Zeile des Aufgabenblattes ist bereits ausgefüllt.

Die Kursleitung erläutert:

> *Hier sehen Sie sechs Stifte. Dafür kann man auch sechs Einer aufschreiben, also für jeden Stift einen Einer. Das ist gleich wie die Zahl oder Anzahl Sechs. Die Frage, aus wie vielen Einern die Zahl Sechs besteht, muss man mit „sechs" beantworten.*

Es wird besprochen, was in diesem Beispiel das Gesamte ist. Mögliche Formulierungen sind: Sechs ist das Gesamte. Die Gesamtmenge beträgt sechs. Es sind insgesamt sechs Stifte.

Gegenstände	Einer	Zahl/Anzahl	Aus wie vielen Einern besteht die Zahl?
	1 1 1 1 1 1	6	sechs

Abbildung 5.2-1 Ausschnitt Aufgabenblatt 5.2 a

Das Wort *insgesamt* ist ein Schlüsselwort. Es hat bereits eine wichtige Rolle bei der Formulierung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion gespielt.

Falls von den Teilnehmer*innen der Zusammenhang von Gegenständen, Einern und Zahlen noch nicht verstanden worden ist bzw. die Formulierungen eine Herausforderung darstellen, sollte das Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet werden. Jeweils ein Beispiel wird von einzelnen Teilnehmer*innen vorgestellt. Dabei sollen Antworten für nachfolgende Fragen formuliert werden:

Wie viele Gegenstände haben Sie gezeichnet?

Ist das gleich wie Ihre aufgeschriebene Anzahl?

Stellen Ihre gezeichneten Gegenstände eine Menge dar? Enthält diese Menge gleiche Elemente?

Welche Elemente haben Sie dargestellt?

Ist das wichtig für die Anzahl der Elemente? Welche Zahl können Sie dafür schreiben? Ist die Zahl gleich wie die Anzahl?

Wie viele Einer sind es?

Wie viele sind es insgesamt?

Wie groß ist in Ihrem Beispiel die Gesamtmenge?

Ergebnis dieser Wiederholung sollte sein, dass die Begriffe *Menge, Zahl oder Anzahl, Einer, Gesamtmenge* richtig zugeordnet und erklärt werden können.

5.2.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gesamtmenge und Teilmengen

Didaktische Ziele

- Zerlegungen von Ganzen in Teile zunächst auf der Handlungsebene mit entsprechender Versprachlichung durchführen und dann – ganz abstrakt – auf Zahlzerlegungen übertragen
- durch systematisches, strukturiertes Vorgehen sollen Zusammenhänge zwischen einzelnen Zahlzerlegungen als Basis für eine Automatisierung verstanden werden („Hier eins mehr – da eins weniger.“)

EXPLORATION

Einsichten, die bei der handelnden Mengenzerlegung (Gesamtmenge in Teilmengen zerlegen) gewonnen wurden, werden nun auf Zahlzerlegungen übertragen. Dafür wird eine geeignete Visualisierungsform angeboten.

Erneut werden die verschiedenen Aufteilungen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen untersucht.

Diese Mengenbetrachtung hat zunächst wiederholenden Charakter, bereitet aber den sehr wichtigen Schluss auf die Zahlzerlegung vor.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 5.2 b** *Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlzerlegung* (Bearbeitungsdauer 10–20 Minuten) an die Teilnehmer*innen. In der folgenden Unterrichtssequenz wird das Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet. Auf der linken Seite des Aufgabenblattes werden Mengenbetrachtungen und auf der rechten Seite die entsprechenden Zahlbetrachtungen angestellt.

Die entsprechenden Abbildungen werden durch die Kursleitung auf Overhead-Folien oder mit einem Beamer gezeigt.[4] Die Kursleitung erläutert zunächst die Abbildungen und die passenden Formulierungen. Die Teilnehmer*innen finden diese Abbildungen und Formulierungen auf dem vor ihnen liegenden **Aufgabenblatt 5.2 b** (linker Teil).

AUFGABENBLATT 5.2 b

Auf dem **Aufgabenblatt 5.2 b** ist die Gesamtmenge von sechs Stiften dargestellt. Die Teilmengen werden farblich unterschieden (rote und blaue Stifte).

Ziel ist es, den Gedanken zu verstehen und zu formulieren, dass in einer Gesamtmenge von insgesamt sechs Elementen unterschiedliche Teilmengen (die Teile) enthalten sein können.

> *Die Gesamtmenge ist sechs. Welche Teilmengen können darin enthalten sein? Auf dem Aufgabenblatt werden die Teilmengen mit unterschiedlichen Farben verdeutlicht.*

Die Kursleitung vergewissert sich, dass die Formulierungen der Teilnehmer*innen passend sind. Die Kursleitung bittet verschiedene Teilnehmer*innen, die Abbildungen zu beschreiben und dabei die Begriffe Gesamtmenge und Teilmengen zu verwenden.

> *Es sind insgesamt sechs Stifte.*

Insgesamt sechs Stifte

> *In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind fünf rote und ein blauer Stift enthalten. Die Teilmengen sind 5 und 1.*

Insgesamt sechs (Gesamtmenge): fünf rote, ein blauer Stift (Teilmengen)

> *In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind vier rote und zwei blaue Stifte enthalten. Die Teilmengen sind also 4 und 2.*

Insgesamt sechs (Gesamtmenge): vier rote, zwei blaue Stifte (Teilmengen)

Im Kursgespräch werden die noch nicht notierten Teilmengen der Gesamtmenge 6 ermittelt. Die Teilnehmer*innen schreiben jetzt die Formulierungen selbstständig auf das Aufgabenblatt. Gemeinsam werden die Formulierungen besprochen.

> *In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind drei rote und drei blaue Stifte enthalten. Die Teilmengen sind also 3 und 3.*

Insgesamt sechs (Gesamtmenge): drei rote, drei blaue Stifte (Teilmengen)

In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind zwei rote und vier blaue Stifte enthalten. Die Teilmengen sind also 2 und 4.

Insgesamt sechs (Gesamtmenge): zwei rote, vier blaue Stifte (Teilmengen)

In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind ein roter und fünf blaue Stifte enthalten. Die Teilmengen sind also 1 und 5.

Insgesamt sechs (Gesamtmenge): ein roter, fünf blaue Stifte (Teilmengen)

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, dass sich jede*r sechs Wendeplättchen nimmt und die mit Stiften dargestellten Gesamt- und Teilmengen anhand von Wendeplättchen nachvollzieht.

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit sechs Wendeplättchen zu agieren (Beispiel Zweier-/Viererteilmenge): Entweder die Wendeplättchen werden schrittweise gewendet (z. B. ●●○○○○) oder die Wendeplättchen werden einfarbig verwendet und das Zerlegen in Teilmengen durch Auseinanderziehen der Plättchen angedeutet (z. B. ○○ ○○○○).

Wichtig ist an dieser Stelle, auf den Zusammenhang zwischen den einzelnen Zeilen in der Darstellung hinzuweisen. Ziel ist, dass die Teilnehmer*innen erkennen, dass von Zeile zu Zeile auf der linken Seite immer eins weniger wird und auf der rechten Seite eins mehr. Die Gesamtmenge bleibt gleich.

Dazu bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen, zu beschreiben, was sich von einer Darstellung zur nächsten Darstellung verändert hat. Eine mögliche Frage wäre: „Was verändert sich von der einen Darstellung zur nächsten?“

Auch beim Nachlegen der Darstellungen mit Wendeblättchen wird systematisch vorgegangen und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zerlegungen werden noch einmal versprachlicht.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Mit selbst durchgeführten Materialhandlungen haben sich die Teilnehmer*innen die Zusammenhänge mehrfach verdeutlicht und sie dabei versprachlicht. Ziel hierbei ist es, über das Verständnis der Zusammenhänge eine Grundlage für die Automatisation sämtlicher Zahlzerlegungen zu schaffen.
- Wichtig ist die zusammenfassende Erkenntnis, dass der oben beschriebene Zusammenhang von Gesamt- und Teilmengen für alle Mengen gilt.

5.2.3 Vortrag und Aufgabenblatt 5.2 b – Zahlzerlegungen

Didaktisches Ziel
durch systematisches, strukturiertes Vorgehen am Beispiel der Zahl 6 Zusammenhänge zwischen einzelnen Zahlzerlegungen erkennen („Hier eins mehr – da eins weniger.“)

EXPLORATION

Die Zahl Sechs kann zerlegt werden.

Das, was im linken Teil des **Aufgabenblattes 5.2 b** als Mengensituation dargestellt ist, findet seine genaue Entsprechung in der Zahldarstellung im rechten Teil des **Aufgabenblattes 5.2 b** – links die Gesamtmenge und ihre Teilmengen, rechts die entsprechende Zahl und ihre Zerlegungszahlen. Das Gesamte ist die Sechs. Die Teile sind z. B. die Fünf und die Eins.

Um das zu verdeutlichen, wird nachfolgend eine geeignete Form der Visualisierung vorgeschlagen.

Fundamental ist (unabhängig von der Visualisierung) der Denkschritt:

Zahlen repräsentieren und verdeutlichen Mengen. Die *Mengenzerlegung* (Teilmengen einer Gesamtmenge) kann auf Zahlen übertragen werden. Dabei wird von *Zahlzerlegungen* gesprochen. Die Teilnehmer*innen vollziehen hierbei zwei Abstraktionsschritte:

Abstraktionsschritt 1:

Mengendarstellungen abstrahieren tatsächlich vorhandene Mengen. Mengenhandlungen können mit unterschiedlichen Elementen vollzogen werden. Dabei stimmt die Anzahl überein. In diesem Beispiel werden insgesamt sechs Elemente in fünf Elemente und ein Element zerlegt. Dabei ist es nicht relevant, ob es sich um Stifte, Steckwürfel oder Wendeplättchen handelt.

Abstraktionsschritt 2:

Zahlen werden gedacht. Sie repräsentieren zwar konkrete Mengen (Anzahl), können jedoch ohne Mengenbezüge interpretiert werden. Zahlen bestehen aus Einern und lassen sich in Teile zerlegen. Die Zahlzerlegungen können immer wieder an Mengenhandlungen nachvollzogen werden. Das Loslösen (nicht das Ignorieren) von Mengenhandlungen führt die Teilnehmer*innen hin zum abstrakten Zahlverständnis.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

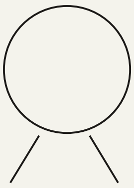
AUFGABENBLATT 5.2 b

Die Kursleitung erläutert an der Tafel die Visualisierungsform, die nachfolgend für Zahlzerlegungen genutzt werden soll. Im oberen Teil wird das Gesamte, die zu zerlegende Zahl eingetragen. Diese Zahl wird in zwei Teile zerlegt. Die beiden Teile werden jeweils an die beiden nach unten führenden Linien geschrieben. Das soll verdeutlichen, dass die beiden Teile in dem Gesamten enthalten sind.[5]

Zunächst wird diese Visualisierungsform gemeinsam auf dem **Aufgabenblatt 5.2 b** erprobt.

Es wird von der Mengenzerlegung auf die Zahlzerlegung geschlossen.

Dabei entsprechen das Gesamte der Gesamtmenge und die Teile den Teilmengen.



Das Gesamte – entspricht der Gesamtmenge

Die Teile – entsprechen den Teilmengen

Abbildung 5.2-2 Visualisierung der Zahlzerlegung

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, eine Zahlzerlegung der Sechs in Teilmengen darzustellen. Dafür sollen auf dem **Aufgabenblatt 5.2 b** die Felder neben der passenden Mengenzerlegung genutzt werden.

Gesamtmenge, Teilmengen	Zugehörige Zahlzerlegung
 *insgesamt sechs rote Stifte, kein blauer Stift*	*6* *6 0*
 *insgesamt sechs: fünf rote, ein blauer Stift*	*6* *5 1*
 *insgesamt sechs: vier rote, zwei blaue Stifte*	*6* *4 2*

 *insgesamt sechs: drei rote, drei blaue Stifte*	*6* *3* *3*
 *insgesamt sechs: zwei rote, vier blaue Stifte*	*6* *2* *4*
 *insgesamt sechs: ein roter Stift, fünf blaue Stifte*	*6* *1* *5*
 *insgesamt sechs: kein roter Stift, sechs blaue Stifte*	*6* *0* *6*

Abbildung 5.2-3 Aufgabenblatt 5.2 b

Mögliche Formulierungen sind:
- Die Sechs kann in fünf und eins zerlegt werden.
- In der Sechs sind fünf und eins enthalten.
- Das Gesamte ist die Sechs und die Teile sind die Fünf und die Eins.
- Die Sechs kann in vier und zwei zerlegt werden.
- In der Sechs sind vier und zwei enthalten.
- Das Gesamte ist die Sechs und die Teile sind die Fünf und die Eins.
- Usw.

Warum ist das so? Wieso kann man die Sechs in verschiedene Teile zerlegen? Warum kann man die Sechs in Zahlen aufteilen?

In der Sechs gibt es sechs Einer. Diese kann man unterschiedlich zusammenfassen. Das ist jetzt tatsächlich eine Denk-Aufgabe: Sechs Einer kann man als fünf Einer und einen Einer schreiben, Man denkt sich eine 5 und eine 1.

Oder sechs Einer kann man als vier Einer und zwei Einer schreiben. Man denkt sich eine 4 und eine 2.

Die Kursleitung verdeutlicht die Zahlzerlegung der Sechs z. B. in nachfolgender Schreibweise an der Tafel. Das soll den Teilnehmer*innen zeigen, dass es auch andere Visualisierungen geben kann.

Zahlzerlegungen der Sechs:

6 → 5/1; 4/2; 3/3; 2/4; 1/5

Streng genommen kann die Sechs auch in die Null und die Sechs zerlegt bzw. in die Sechs und die Null zerlegt werden. Um das zu verstehen, bietet sich wiederum der Mengenbezug an.

Eine Menge von sechs Äpfeln kann natürlich in Teilmengen aufgeteilt werden. Selbstverständlich in vier und zwei Äpfel oder in drei und drei Äpfel und so weiter.

Vorstellbar ist aber auch, dass ein Teil leer ist und die sechs Äpfel dem anderen Teil zugeordnet werden. Leichter vorstellbar: Die Äpfel werden auf zwei Körbe verteilt. Ein Korb bleibt leer und in den anderen Korb werden sechs Äpfel gelegt.

Übertragen auf Zahlzerlegungen heißt das, dass die Null dazugehört.

Zahlzerlegungen der Sechs unter Einbeziehung der Null:

6 → 6/0; 5/1; 4/2; 3/3; 2/4; 1/5; 0/6

Was unterscheidet die Zahlzerlegung der Sechs in 4/2 und in 2/4?

Auch hier erfolgt die Erklärung mit Mengenbezug: Mit dem Beispiel roter und blauer Stifte können die verschiedenen Sachverhalte folgendermaßen dargestellt werden.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 2 und 4 sowie der Teilmengen 4 und 2:

Zum einen sind es zwei blaue Stifte sowie vier rote und zum anderen sind es vier blaue Stifte und zwei rote. Das sind unterschiedliche Mengensituationen.

Wichtig ist wieder, den Zusammenhang zwischen den einzelnen Zerlegungen zu betrachten und zu versprachlichen. Die Kursleitung betont die Einsicht: Auf der einen Seite wird eins weniger, auf der anderen Seite wird eins mehr, bleibt die Gesamtmenge aber gleich.

5.2.4 Gruppenarbeit und Aufgabenblatt 5.2 c – Zahlzerlegungen

Didaktisches Ziel
die Zerlegungen aller Zahlen zwischen 5 und 10 in sämtlichen Varianten spielerisch trainieren: zunächst abstrakt aus dem Gedächtnis abgerufen und danach auch gegenständlich repräsentiert, mit dem Ziel der Automatisation der Zahlbeziehungen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung teilt die Teilnehmer*innen in sechs Teams auf. Jedes Team hat jetzt die Aufgabe, für jeweils eine Zahl von 5 bis 10 alle möglichen Zahlzerlegungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2 c** *Zahlzerlegungen* (Bearbeitungsdauer ca. 20 Minuten) zu notieren. Teamarbeit deswegen, weil damit gleichzeitig ein Gespräch über die Zahlzerlegungen angeregt wird.

Um Zahlzerlegungen nachvollziehen zu können, bieten sich Steckwürfel an:

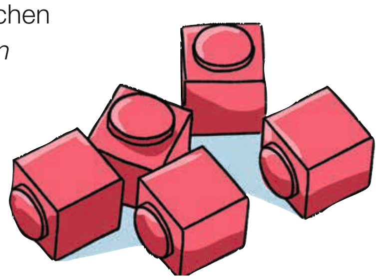


Abbildung 5.2-4 Mit Steckwürfeln Zahlzerlegungen nachvollziehen

AUFGABENBLATT 5.2 c

Die Kursleitung erläutert die Aufgabenstellung – die Aufgabe ist für die Teilnehmer*innen auf Seite 1 des **Aufgabenblattes 5.2 c** formuliert.

- Jedem Team wird eine Zahl von 5 bis 10 zugewiesen.
- Zunächst notieren die Teilnehmer*innen aus dem Gedächtnis, welche Zahlzerlegungen ihnen für die Zahl einfallen. Dafür nutzen sie die vorgesehenen Visualisierungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2 c.** Es umfasst mehrere Seiten und eignet sich zur Protokollierung der Zahlzerlegungen der Zahlen 5 bis 10. Die Teilnehmer*innen suchen sich die entsprechende Seite für die zugewiesene Zahl heraus.
- Danach nimmt sich das Team die entsprechende Anzahl an Steckwürfeln.
- Gemeinsam werden alle möglichen Zahlzerlegungen der zugewiesenen Zahl mit den Steckwürfeln nachvollzogen. Die noch nicht eingetragenen Zahlzerlegungen werden auf dem **Aufgabenblatt 5.2 c** ergänzt.
- Im unteren Teil des Aufgabenblattes wird notiert, wie viele Zahlzerlegungen die Teilnehmer*innen für die zugewiesene Zahl finden.
- Die Teams haben anschließend die Aufgabe, die Zahlzerlegungen der zugewiesenen Zahl an der Tafel zu präsentieren.

Während die Teams die Zahlzerlegungen präsentieren, protokollieren die anderen Teilnehmer*innen die entsprechenden Zahlzerlegungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2 c**.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes können:

- Es gelingt, mit Gegenständen (hier Steckwürfel), die Zahlzerlegungen aller Zahlen bis zehn darzustellen und zu benennen, was dem Gesamten und den Teilen entspricht.
- Das gelingt auch abstrakt. Alle Zahlen bis zehn können in ihre Teile zerlegt werden. Die gegenständlichen und die abstrakten Zahlzerlegungen aller Zahlen bis zehn können präsentiert werden. Dabei können Zusammenhänge zwischen einzelnen Zerlegungen einer Zahl verbalisiert werden.
- Teilnehmer*innen gelingt es, die Zahlen mit ihren Beziehungen untereinander abzurufen und als Gedankenkonstrukt zu nutzen.

BEISPIEL
für die Acht:

In der Gesamtmenge von acht Äpfeln sind auch Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln enthalten – die wiederum für sich Gesamtheiten sind. Diese Mengenbetrachtung gilt für die Zahlbetrachtung gleichermaßen. Das heißt, in der Acht sind die Drei und die Fünf enthalten. Das Gesamte ist acht, ein Teil dieses Gesamten ist drei und der andere Teil ist fünf. Für die Acht gibt es weitere Zahlbeziehungen. Wird nämlich von einer Teilmenge ein Element in die andere Teilmenge verschoben, ergeben sich aus der Zerlegung der Acht in Fünf und Drei auch die Zerlegungen in Vier und Vier sowie in Sechs und Zwei.

ENDNOTEN

1 Die Logik einer Rechenoperation zu verstehen heißt, interpretieren zu können, mit welcher Frage diese Rechenoperation sinnvoll verknüpft werden kann: Welche Fragen in welchen Situationen beschreiben die Operationen der Mengen oder Zahlen? Auf welche Weisen können diese Fragen beantwortet werden (bzw. welche Weisen der Beantwortung sind in der Mathematiker*innengemeinschaft gültig)?

2 Michael Gaidoschik (2007/2015). Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien (8. Auflage). *Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.*

3 www.materialsuche.grundbildung.de (Tafelbilder)

4 www.materialsuche.grundbildung.de (Tafelbilder)

5 Es werden hier die Begriffe *Gesamtzahl* und *Teilzahlen* vermieden, weil sie ungebräuchlich sind. Im Grunde wären diese aber präzisere, vielleicht sogar verständlichere Begriffe als die Begriffe *das Gesamte* und *die Teile* – bei denen nicht explizit erkennbar ist, dass sie sich hier auf die Zahlenebene beziehen. Diese wären ebenso auf der Mengenebene als Synonyme zu *Gesamtmenge* und *Teilmengen* nutzbar.

TEILE, GANZES UND GLEICHUNGEN

7

7 TEILE, GANZES UND GLEICHUNGEN

Kora Deweis-Weidlinger

Didaktische Ziele

- Operationsverständnis für Addition und Subtraktion festigen und vertiefen durch Wechseln zwischen Repräsentationsebenen (Handlung – Sachsituation – Abbildung – Term)
- für Mengenhandlungen oder Sachsituationen richtige, vollständige Gleichungen (Plus oder Minus) aufstellen und gesuchte Größen ermitteln

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Mengen verstehen („Kardinaler Zahlbegriff“)
- Zahlen in Teilmengen zerlegen („Teile-Ganzes-Verständnis“)
- Addition und Subtraktion als Mengenhandlung verstehen
- Addition und Subtraktion als Term anschreiben (Ziffern und Rechenzeichen kennen)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

In den vorangegangenen Unterrichtseinheiten wurden Mengen durch Zahlen repräsentiert. Die tatsächliche Mächtigkeit einer Menge stand im Vordergrund, eine Menge wurde entsprechend ihrer Mächtigkeit mit diesem speziellen Symbol, der Zahl, bezeichnet. Im Weiteren wurden Gesamtmengen in zwei Teile zerlegt, die jeweils gleich oder unterschiedlich groß sein können.

Auf diesen konkreten Betrachtungen aufbauend wird in dieser Unterrichtseinheit der Fokus auf die Verbindung von Mengenhandlungen und -vergleichen mit der Struktur einer Gleichung gelegt. Damit ist gemeint, dass man sich eine Gesamtmenge und ihre Teilmengen gleichzeitig vorstellen und ihre Beziehungen untereinander beschreiben kann.

Das Operationsverständnis von Addition und Subtraktion soll ausgebaut und mit den Repräsentationen von Addition und Subtraktion in verschiedenen Gleichungsformen verknüpft werden. Auch auf die Umkehrung der Addition durch die Subtraktion und die Umkehrung der Subtraktion durch die Addition wird eingegangen.

Vermittelt werden soll den Teilnehmer*innen in dieser Unterrichtseinheit,

- dass die Struktur einer Gleichung Aussagen über die beteiligten Größen zulässt,
- dass es für die Betrachtung bzw. Veränderung einer aus zwei Teilmengen bestehenden Gesamtmenge eine überschaubare Anzahl von Gleichungen gibt,
- dass diese Gleichungen alle Fragestellungen in Sachsituationen mit Mengenveränderungen beschreiben, wenn den Situationen eine aus zwei Teilmengen bestehende Gesamtmenge zugrunde liegt,
- dass sich die Frage „Suche ich die Gesamtmenge oder suche ich eine Teilmenge?“ in der Struktur der dazugehörigen Gleichung wiederfindet,
- dass sich Gesamtmengen auch in mehr als zwei Teile zerlegen und dass sich die Erkenntnisse aus der Zerlegung einer Gesamtmenge in zwei Teile übertragen lassen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Die Teilnehmer*innen sollen erfahren, dass der Blick auf die Struktur einer Gleichung losgelöst von der Notwendigkeit, das Ergebnis einer Aufgabe errechnen zu müssen, eine neue Sicht auf die Mathematik eröffnet. Da viele Menschen mit Rechenschwierigkeiten seit ihrer frühesten Schulzeit ein Gleichheitszeichen als Aufforderung zum Rechnen verstanden haben, wird es unter Umständen Geduld erfordern, bis sich die betroffenen Teilnehmer*innen von der bisherigen Sichtweise gelöst haben.

Eine weitere Schwierigkeit dieser Unterrichtseinheit kann darin bestehen, Texte mathematisch zu analysieren, die Sachverhalte zum Zwecke der Veranschaulichung zu skizzieren und schließlich zu erkennen, nach welcher Größe gesucht wird. Im nächsten Schritt kann es manchen Teilnehmer*innen Schwierigkeiten bereiten, eine der Sachsituation entsprechende Gleichung zu formulieren, um die gesuchte Größe ermitteln zu können.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Vorausgesetzt wird in dieser Unterrichtseinheit, dass sich die Teilnehmer*innen den kardinalen Zahlbegriff erfolgreich erarbeitet haben. Es sollten ebenfalls zuvor verstanden sein:

- das Verändern von Mengen und Zahlen (Kapitel 3)
- das Vergleichen von Mengen (Kapitel 4)
- das Aufteilen von Mengen (Kapitel 5).

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): *DVV-Rahmencurriculum Rechnen.* Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn. Didaktische Erläuterungen zu dieser Unterrichtseinheit finden sich an folgenden Stellen:

- Umkehraufgabe: Stufe 1, S. 21
- Bedeutung der Symbolisierung: Stufe 1, S. 24 f.
- Intermodalität sowie Betrachtung der Addition und Subtraktion bezüglich des Umgangs mit Mengen: Stufe 1, Kapitel 2.5, S. 26 bis 29
- Mengenerfassung und relationaler Zahlbegriff: Stufe 1, S. 33 bis 34
- Mengenvergleich: Stufe 1, S. 34 bis 36
- Betrachtungen zur Subtraktion: Stufe 2, S. 70 bis 71
- Allgemeine didaktische Anmerkungen: Stufe 2, Kapitel 4 auf S. 71 bis 73 und Stufe 3, Kapitel 1 bis 6 auf S. 125 bis 130.

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Steckwürfel
- Geodreieck
- viel Papier
- Möglichst verschiedenfarbige Stifte

7.1 Operationsverständnis zur Addition und Subtraktion

Didaktische Ziele

- Operationsverständnis für Addition und Subtraktion festigen und vertiefen durch Wechseln zwischen Repräsentationsebenen (Handlung – Sachsituation – Abbildung – Term)
- für Mengenhandlungen oder Sachsituationen richtige, vollständige Gleichungen (Plus oder Minus) aufstellen und gesuchte Größen ermitteln

EXPLORATION

Den Teilnehmer*innen ist bekannt, dass Zahlen Anzahlen oder die Mächtigkeit von Mengen beschreiben, dass sie also Antworten geben auf die Frage „Wie viele?". Darüber hinaus wissen sie, dass das Zerlegen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen als Subtraktionsaufgabe und das Zusammenfügen zweier Teilmengen zu einer Gesamtmenge als Additionsaufgabe dargestellt werden kann.

In diesem Kapitel geht es darum, diese Kenntnisse explizit mit Sachsituationen in Verbindung zu bringen. So sollen verschiedene Vorstellungen zur Addition und Subtraktion angesprochen werden. Dabei sollen Sachsituationen in bildliche Darstellungen überführt werden und anschließend als Gleichungen notiert werden.

Plus kann bedeuten, eine Menge zu einer anderen Menge hinzuzufügen bzw. mit einer anderen zu vereinigen. Damit verändert sich die anfangs vorhandene Menge. Die beiden Ursprungsmengen werden zu einer Gesamtmenge bzw. die Ausgangsmenge wird verändert und ergibt so eine neue Menge.

Plus kann auch bedeuten, dass zwei separate Mengen nicht vereint, sondern nur „zusammengedacht" werden. Hier entsteht die Gesamtmenge nur gedanklich.

Plus kann auch als Vergleich bzw. Ausgleich zweier Mengen verstanden werden, in dem die zwei Mengen in Beziehung gesetzt werden. Diesen Vorstellungen kann sowohl eine dynamische als auch eine statische Struktur zugrunde liegen.

Minus kann bedeuten, eine Gesamtmenge um eine Teilmenge zu verringern. In diesem Fall bleibt eine andere Teilmenge als Rest übrig. Auch dies geht mit einer Mengenveränderung einher, die Ausgangsmenge ist als solche nicht mehr vorhanden. Zudem verschwindet möglicherweise die entnommene Teilmenge vollständig (Geld wird ausgegeben, Essen wird verspeist etc.) und es bleibt lediglich die entstandene Restmenge sichtbar zurück. Dieses „Nicht-Mehr-Nachzählen-Können" erschwert vielen Menschen den Umgang mit der Subtraktion. Wie bei der Addition ist es auch bei der Subtraktion möglich, dass sich der Vorgang der Mengenentnahme nur in der Vorstellung abspielt.

Minus kann auch bedeuten, ich betrachte eine Menge und überlege: Wenn ich eine bestimmte Teilmenge betrachte, welche zweite Teilmenge ergibt sich dann? In dieser Betrachtungsweise ändert sich nichts an der Gesamtmenge.

Minus kann ferner bedeuten zu überlegen, welche Teilmenge entnommen werden muss oder kann, wenn eine bestimmte Teilmenge übrig bleiben soll.

Unabhängig davon, ob die hier betrachtete Ausgangsmenge real vorliegt oder nicht, entsprechen die beiden Fragestellungen einer fiktiven Handlung, sie finden nur in der Vorstellung statt.

Minus kann auch interpretiert werden als Betrachtung zweier Teilmengen verbunden mit der Fragestellung, wie groß denn die Gesamtmenge war, von der die eine Teilmenge entnommen wurde, sodass die andere Teilmenge als Rest übrig blieb.

Hier handelt es sich offensichtlich um die gleiche Ausgangssituation wie oben für die Addition beschrieben – allerdings mit einer veränderten Fragestellung, die aus einer Subtraktion herrührt, da etwas weggenommen wurde. Und rechnerisch wird diese vorgebliche Subtraktion tatsächlich durch die Addition der beiden Teilmengen gelöst. Dies könnte viele Teilnehmer*innen in ihrer Schulzeit ziemlich verwirrt haben.

Minus kann auch bedeuten, zwei Mengen miteinander zu vergleichen. Dies entspricht nur auf den ersten Blick nicht mehr dem Teil-Teil-Ganzes-Konzept. In Kapitel 5 wurde herausgearbeitet, dass sich auch der Vergleich zweier Mengen in dieses Konzept einfügt, wenn die größere der beiden Mengen als Gesamtmenge, die kleinere als Restmenge und die Differenz als entnommene Teilmenge interpretiert werden.

Beim Mengenvergleich wurde dies in Kapitel 5 besonders deutlich:

Aus dem Vergleich von 5 mit 4 ergeben sich zwei gleichwertige Aussagen:

5 ist 1 mehr als 4   und   4 ist 1 weniger als 5

Dieser Vergleich lässt sich durch zwei Gleichungen beschreiben:

$4 + 1 = 5$ und $5 - 1 = 4$.

Welche Gleichung zu welcher Aussage besser passt, ist ein guter Gegenstand der Diskussion mit den Teilnehmer*innen.

Das Verständnis dieser Zusammenhänge ist eine wichtige Voraussetzung zum Verständnis von Sachsituationen und zur Lösung der damit verbundenen Textaufgaben.

Eine Anmerkung noch: Die Formulierung „… kann bedeuten …“ weist an dieser Stelle schon auf den wichtigen Aspekt hin, dass gute Rechner*innen beim Rechnen diese Mengenhandlungen bzw. Überlegungen normalerweise nicht vor Augen haben. Aber sie sind in der Lage, Rechenaufgaben auf derartige Fragestellungen zurückzuführen.

Die in diesem Kapitel vorgeschlagenen Aufgabenblätter haben das Ziel, die Teilnehmer*innen zu befähigen, diese Zusammenhänge zu erfassen. Dazu werden Sachsituationen (Rechengeschichten) vorgegeben, zu denen passende Gleichungen gefunden werden sollen. Umgekehrt werden bildliche Darstellungen zu Gleichungen vorgegeben, zu denen der Rechenweg zur Lösung in mathematischer Notation als Gleichung zu formulieren ist bzw. Rechengeschichten zu notieren sind.

Im Alltag treten immer wieder Situationen auf, in denen eine Gesamtmenge in mehr als zwei Teile zerlegt wird. Beispielsweise wenn beim Kochen ein Teil Butter für das Anbraten und ein Teil Butter für die Sauce vorgesehen ist – die restliche Butter wird für das Dessert benötigt. Hier werden unterschiedlich große Teile vom Ganzen weggenommen – wie ist das rechnerisch zu lösen? Das wird abschließender Inhalt dieses Kapitels sein.

7.1.1 Kursgespräch und Aufgabenblatt 7.1 a – Mengenhandlungen skizzieren und symbolisch notieren

Didaktisches Ziel
Sachsituationen zu Additions- und Subtraktionshandlungen bildlich darstellen und als vollständige Gleichung anschreiben

EXPLORATION

Aus Kapitel 3.1 *Addition* und Kapitel 3.2 *Subtraktion* kennen die Teilnehmer*innen das Zusammenfügen zweier Mengen als Addition, das Wegnehmen einer Menge vom Gesamten kennen sie als Subtraktion. Aus Kapitel 5.2 *Zahlzerlegungen* ist ferner bekannt, dass in Zahlen größer als eins andere Zahlen enthalten sind.

An dieses Wissen lehnt sich das nachfolgende Kapitel an. Hierbei sollen Additions- und Subtraktionsgeschichten bildlich dargestellt und als Gleichung notiert werden.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung beginnt den Unterricht mit einem einführenden Beispiel:

In dieser Unterrichtseinheit wollen wir uns damit beschäftigen, wie man Situationen aus dem Alltag, die einen mathematischen Hintergrund haben, bildlich darstellen kann. Wir wollen auch sehen, wie man diese mithilfe von Zahlen und Rechenzeichen aufschreiben kann.

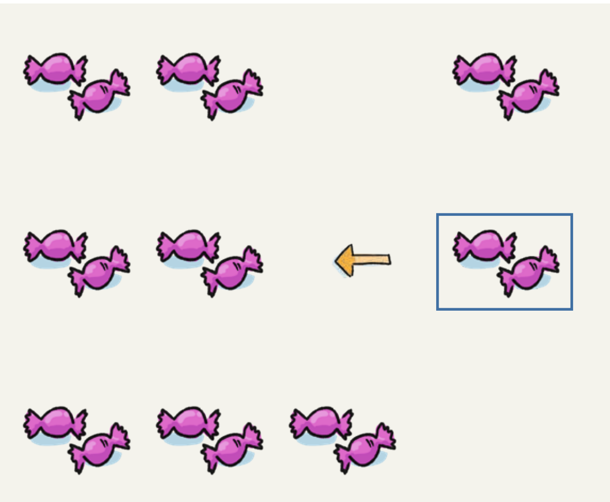
Fangen wir mit einem Beispiel an:

BEISPIEL
Kira hat 4 Bonbons. Sie bekommt noch 2 weitere Bonbons dazu. Jetzt hat sie insgesamt 6 Bonbons.

Wie könnte eine Rechenskizze zu dieser Situation aussehen?

Die Kursleitung lässt die Teilnehmer*innen Vorschläge an die Tafel notieren.

Mögliche Rechenskizzen wären:



Die Kursleitung bespricht die Vorteile und Nachteile der einzelnen Rechenskizzen mit den Teilnehmer*innen. Dazu können folgende Fragen hilfreich sein:

Was ist an den jeweiligen Rechenskizzen gut?

Was ist an den jeweiligen Rechenskizzen weniger gut?

Kann man an allen Rechenskizzen die Handlung (das Hinzugeben) gleich gut erkennen? Wo besser, wo schlechter?

Sind die Rechenskizzen eindeutig? Oder würden auch andere Geschichten/Handlungen dazu passen? Welche?

In einem nächsten Schritt sollen die Rechenskizzen nun in Rechnungen in symbolischer Form übertragen werden.

Wie wir wissen, bietet uns die Mathematik eine Möglichkeit solche Geschichten verkürzt darzustellen. Dazu verwenden wir neben Zahlen auch Rechenzeichen oder andere Symbole. Wie könnten wir also die Geschichte symbolisch darstellen? Welche Gleichung beschreibt diese Geschichte?

Mögliche Antworten der Teilnehmer*innen wären:

4 Bonbons + 2 Bonbons = 6 Bonbons, oder 4 + 2 = 6

Hier wird deutlich, dass zu der Ausgangsgröße von 4 Bonbons, 2 Bonbons dazugegeben werden. Und somit insgesamt 6 Bonbons vorhanden sind.

Auf Grund der Kommutativität der Addition wären aus mathematischer Sicht auch folgende Gleichungen passend:

2 Bonbons + 4 Bonbons = 6 Bonbons, oder 2 + 4 = 6.

Denkbar wäre auch 6 = 4 + 2 oder 6 = 2 + 4.

Entscheidend ist, dass Gleichungen besprochen werden und nicht nur das Ergebnis (z. B. 6) oder die Rechenvorschrift (z. B. 4 + 2) genannt werden.

Auch hier sollte die Kursleitung wieder über die Vor- und Nachteile der verschiedenen Gleichungen mit den Teilnehmer*innen sprechen, sowie über Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser.

Dabei sollte herausgearbeitet werden, dass es für die Gesamtmenge der Bonbons nicht entscheidend ist, ob zu 4 Bonbons 2 hinzukommen, oder zu 2 Bonbons 4 hinzukommen, für die Handlung und die Geschichte macht es jedoch einen Unterschied. Ebenfalls sollte erwähnt werden, dass es für die Notation unerheblich ist, ob die Gleichung 6 = 4 + 2 oder 4 + 2 = 6 lautet. Auf beiden Seiten einer Gleichung muss immer gleich viel stehen.

Das Gleichheitszeichen kann somit immer in beide Richtungen gelesen werden, und ist nicht nur eine Rechenvorschrift, die zum Berechnen eines Ergebnisses (von links nach rechts gelesen) auffordert. Aber auch hier kann erwähnt werden, dass es für die Geschichte bzw. die Handlung einen Unterschied machen kann, ob die Gleichung 4 + 2 = 6 (Kira hat 4 Bonbons, sie bekommt noch 2, jetzt hat sie also insgesamt 6) oder 6 = 4 + 2 (Kira hat 6 Bonbons, 4 hat sie von ihrem Opa bekommen und 2 von ihrer Oma) heißt.

In gleicher Weise sollte die Subtraktion als Umkehrung der Addition besprochen werden.

Dazu sollte das Einführungsbeispiel rückwärts betrachtet und somit leicht verändert werden.

BEISPIEL

Kira hat 4 Bonbons. Sie bekommt noch 2 weitere Bonbons dazu. Jetzt hat sie insgesamt 6 Bonbons.

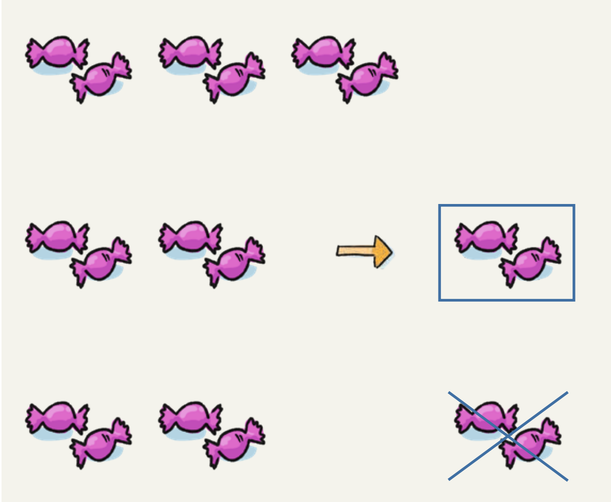
Wie würde die Geschichte lauten, wenn man diese rückwärts liest/denkt?

Eine mögliche Antwort wäre:

Kira hat 6 Bonbons, sie gibt 2 Bonbons weg, jetzt hat sie noch 4 Bonbons.

Wie könnte eine Rechenskizze zu der neuen Geschichte aussehen?

Mögliche Rechenskizzen wären:



Auch hier könnte wieder über Vor- und Nachteile unterschiedlicher Rechenskizzen gesprochen werden.

Welche Gleichung passt zu der neuen Geschichte?

Mögliche Gleichungen wären:

6 Bonbons − 2 Bonbons = 4 Bonbons
oder 6 − 2 = 4

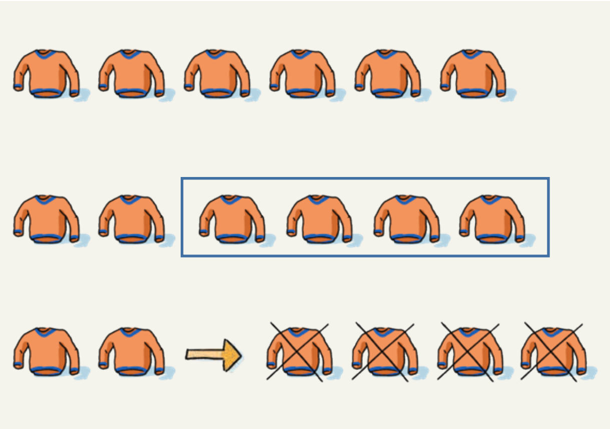
(auch 4 = 6 − 2 wäre denkbar)

Es ist darauf zu achten, dass hier die Subtraktion 6 − 4 = 2 für die Geschichte nicht passend ist und auch aus mathematischer Sicht, die Kommutativität bei der Subtraktion nicht gilt.

In ähnlicher Weise können auch noch die folgenden zwei Rechengeschichten besprochen werden. Zunächst sollten Rechenskizzen an der Tafel notiert werden und dann die entsprechenden Gleichungen, die zu den Geschichten passen.

BEISPIEL
Mirjam hat 6 Winterpullover. Sie wirft 4 davon weg, da sie kaputt sind. Jetzt hat Mirjam noch 2 Winterpullover.

Mögliche Rechenskizzen wären:

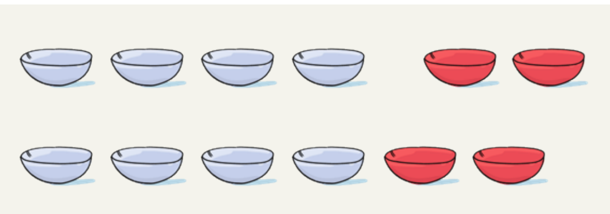


Mögliche Gleichungen wären:

6 − 4 = 2
(2 = 6 − 4)

BEISPIEL
Auf dem Tisch stehen 6 Schüsseln. 4 Schüsseln sind blau, die übrigen 2 Schüsseln sind rot.

Mögliche Rechenskizzen wären:



Mögliche Gleichungen wären:

6 = 4 + 2, 6 − 4 = 2
(6 = 2 + 4, 4 + 2 = 6, 2 + 4 = 6)

Im Anschluss an diese gemeinsame Besprechung sollen die Teilnehmer*innen solche Rechenskizzen und entsprechende Gleichungen nun selbständig erstellen. Dazu wird ihnen Aufgabenblatt 7.1a ausgeteilt.

Lernziel zu Aufgabenblatt 7.1 a
Bei diesem Aufgabenblatt geht es darum, dass die Teilnehmer*innen die beschriebenen Mengenhandlungen zur Addition bzw. Subtraktion bildlich und dann symbolisch mittels Gleichungen darstellen. Der Fokus liegt somit auf der Verbindung von Mengenhandlungen und den dazu passenden Gleichungen. Wichtig ist, dass wirklich Gleichungen und nicht nur additive oder subtraktive Rechenvorschriften notiert werden.

HINWEIS

zu Aufgabenblatt 7.1 a
Die Beispiele decken bewusst eine Vielzahl verschieden strukturierter Sachsituationen zur Addition und Subtraktion ab. Dabei können insbesondere die Beispiele 12 und 13 für die Teilnehmer*innen ungewohnt und auch herausfordernd sein. Aber auch hinter diesen Beispielen stecken Additions- bzw. Subtraktionsvorstellungen, die bewusst gemacht werden sollten. Bei diesen Beispielen werden zwei Mengen mithilfe von Additions- und Subtraktionsgleichungen miteinander verglichen. Gegebenenfalls sollten die Teilnehmer*innen bei der bildlichen und symbolischen Darstellung dieser Sachsituationen unterstützt werden (siehe Lösungen Aufgabenblatt 7.1 a)

7.1.2 Aufgabenblatt 7.1 b – Gleichungen und Rechengeschichten zu bildlichen Mengenhandlungen aufstellen

Didaktische Ziele

- für bildlich dargestellte Additions- und Subtraktionshandlungen passende Sachsituationen finden und als vollständige Gleichung anschreiben
- Verständnis für den Zusammenhang von Plus und Minus festigen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Teilnehmer*innen bekommen **Aufgabenblatt 7.1 b** ausgeteilt. Sie sollen in Einzelarbeit zu den bildlich dargestellten Mengenhandlungen passende Gleichungen aufstellen und Rechengeschichten erfinden.

Diese sollen daraufhin zuerst in Kleingruppen und dann in der Gesamtgruppe besprochen werden. Es empfiehlt sich zumindest die passende(n) Gleichung(en) gemeinsam zu besprechen und pro Aufgabe ein oder zwei Rechengeschichten vorlesen zu lassen und zu besprechen, bzw. gegebenenfalls aufgetretene Fragen und Probleme zu besprechen.

Lernziele zu Aufgabenblatt 7.1 b
Im Fokus der Aufgaben steht die Überführung von bildlichen Mengenhandlungen in Gleichungen und Rechengeschichten. Wichtig ist, dass Gleichungen aufgestellt werden und nicht lediglich additive bzw. subtraktive Rechenvorschriften. Außerdem sollte den Teilnehmer*innen bewusst werden, dass man zu vielen bildlichen Darstellungen mehrere passende Gleichungen finden kann. Damit einhergehend sollten sie erkennen, dass additive und subtraktive Mengenhandlungen in engem Zusammenhang stehen und viele bildliche Darstellungen als Additionen und Subtraktionen aufgefasst werden können.

7.1.3 Kursgespräch und Aufgabenblatt 7.1 c – Gleichungen mit einer unbekannten Größe zu Sachsituationen aufstellen

Didaktisches Ziel
bildlich dargestellte Additions- und Subtraktionshandlungen als Gleichungen mit Platzhaltern für unbekannte Größen anschreiben

EXPLORATION

Anders als bei den vorangegangenen Aufgaben, bei denen Gleichungen notiert werden sollten, zu denen alle Informationen bekannt waren, sollten bei diesen Übungen Gleichungen mit einer Unbekannten notiert werden. Die unbekannte Größe kann mit einer Leerstelle, einem kleinen waagrechten Strich oder einem Kästchen markiert werden. Üblicherweise werden in der Mathematik Variablen für unbekannte Größen in Gleichungen verwendet. Da dies auf die Teilnehmer*innen jedoch abschreckend wirken könnte und eher an algebraische Aufgaben erinnern könnte, was hier jedoch nicht im Fokus steht, sollte an dieser Stelle auf die Verwendung von Variablen verzichtet werden. Eine der oben genannten Formen der Notation für die Platzhalter, scheint in dieser Situation angebrachter zu sein.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Häufig stellen sich in unserem Alltag mathematische Fragen. Dann sind also noch nicht alle Informationen vorhanden. Meist wird eine Information gesucht. Diese kann mithilfe von Mathematik berechnet werden. Aber auch solche Situationen und Fragen lassen sich verkürzt als Gleichungen aufschreiben. Für die gesuchte Information lässt man einfach eine Leerstelle oder man macht einen kleinen Strich oder ein Kästchen. Das bedeutet, dass man die Zahl an der jeweiligen Stelle noch nicht weiß.

Häufig sieht dies z. B. so aus:

BEISPIEL
3 + 5 = __
8 – 4 = __

Aber die fehlende Information, kann auch an andere Stelle stehen, etwa:

BEISPIEL
__ – 3 = 4
9 – __ = 7

Wie würde zum Beispiel eine passende Gleichung zu folgender Geschichte aussehen?

BEISPIEL
Jenny hat 4 Rosen. Sie bekommt noch weitere Rosen von ihrem Vater geschenkt. Sie hat dann insgesamt 10 Rosen. Wie viele Rosen hat sie von ihrem Vater bekommen?

Mögliche Gleichungen wären:

4 + __ = 10

10 – 4 = __

Im Anschluss arbeiten die Teilnehmer*innen selbständig an **Aufgabenblatt 7.1 c**. Hierbei sollen sie zu beschriebenen Mengenhandlungen passende Gleichungen finden. Gegebenenfalls können sie vorab Rechenskizzen anfertigen, wenn gewünscht.

Lernziel zu Aufgabenblatt 7.1 c
Bei diesem Aufgabenblatt steht der Ausbau eines breiten Additions- und Subtraktionsverständnisses im Vordergrund. In den Situationen werden verschiedene Grundvorstellungen angesprochen, die von den Teilnehmer*innen in additive bzw. subtraktive Gleichungen übersetzt werden sollen. Somit sollte ihnen bewusst werden, dass additive Situationen vielfältiger sind als ein reines Hinzufügen von Elementen gleicher Art zu einer bestehenden Anzahl von Elementen. Auch subtraktive Situationen sind abwechslungsreicher als das bloße Wegnehmen einer Anzahl von Elementen einer Art von einer gegebenen Gesamtmenge von Elementen dieser Art. Zusätzlich sollte der enge Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion verstärkt bewusst werden.

Sie können diese Aufgaben auch so variieren, dass Gleichungen mit Platzhaltern vorgegeben werden und die Teilnehmer*innen entsprechende Rechengeschichten dazu erfinden sollen.

7.1.4 Kursgespräch und Aufgabenblatt 7.1 d – Gleichungen zu Sachsituationen mit mehr als zwei Teilmengen

Didaktisches Ziel
zu vorgegebenen Sachsituationen mit Additions- oder Subtraktionshandlungen mit mehr als zwei Teilmengen passende Gleichungen aufstellen

EXPLORATION

Bisher waren Gleichungen zu Sachsituationen mit zwei Teilmengen Gegenstand der Betrachtungen. Oft gibt es jedoch Situationen, bei denen mehr als zwei Teilmengen die Gesamtmenge ergeben oder von einer Gesamtmenge entnommen werden. Als Beispiel sei die Zusammensetzung der Miete aus Nettokaltmiete, Betriebskosten, Heizkosten, Telefon etc. genannt. Im Folgenden soll es um solche Sachsituationen gehen und darum zu diesen passende Rechenskizzen und Gleichungen zu finden.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

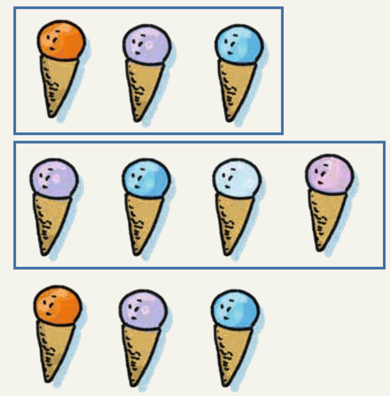
Wir wollen uns heute mit komplizierteren Situationen beschäftigen und wieder versuchen, diese als Gleichung aufzuschreiben.

Beginnen wir mit einem Beispiel.

BEISPIEL
Kiano hat Geld für 10 Kugeln Eis. Er selbst möchte 3 Kugeln Eis essen. Sein Freund Manfred möchte 4 Kugeln Eis. Wie viele Kugeln Eis kann dann ihre Freundin Ilana essen?

Wie könnte eine Rechenskizze zu dieser Geschichte aussehen?

Mögliche Rechenskizzen wären:



Welche Gleichung passt zu der Geschichte?

Gibt es mehr als eine Gleichung, die gut passt? Welche passen noch gut?

Mögliche Gleichungen wären:

10 − 3 − 4 = __

10 − (3 + 4) = __

3 + 4 + __ = 10

Auch hier bietet es sich wieder an, mit den Teilnehmer*innen über die unterschiedlichen Rechenskizzen und Gleichungen sowie deren Vor- und Nachteile zu sprechen.

So sollte thematisiert werden, dass, wenn mehrere Teile von einer Gesamtmenge weggenommen werden, diese sukzessive weggerechnet werden können (siehe 1. Gleichung), oder man die Teile zu einem größeren Teil zusammenfassen kann, welcher dann von der Gesamtmenge subtrahiert werden kann (siehe 2. Gleichung).

Daraufhin wird den Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 7.1 d** ausgeteilt, auf dem sie nun selbstständig ähnliche Aufgaben lösen sollen.

> **Lernziele zu Aufgabenblatt 7.1 d**
> Auch hier steht das Aufstellen von passenden Gleichungen zu gegebenen Sachsituationen im Vordergrund. So sollte das Operationsverständnis zur Addition und Subtraktion vertieft werden. Auch die Umkehrung von Addition und Subtraktion wird hier wieder thematisiert, indem mehrere passende Gleichungen notiert werden können.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Bei einer Addition werden die Teilmengen zusammengerechnet und ergeben die Gesamtmenge. Dies kann auch als Hinzufügen einer Menge zu einer anderen Menge interpretiert werden.
- Bei einer Subtraktion verringert sich die Gesamtmenge um eine Teilmenge, die andere verbliebene Menge ist auch eine Teilmenge. Dies kann als das Wegnehmen einer Menge von einer Gesamtmenge gedeutet werden.
- Gleichungen sind nicht nur Aufforderungen zum Rechnen, sondern vielmehr eine Gegenüberstellung oder der Vergleich von zwei wertgleichen mathematischen Ausdrücken, auch Terme genannt. Diese Ausdrücke stehen oft für Veränderungen von Mengen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Mengenhandlungen als Gleichungen darzustellen.
- Gleichungen können auch aufgestellt werden, wenn eine Größe gesucht ist. Sie wurde mit einem Platzhalter wie beispielsweise __ oder □ zum Ausdruck gebracht. Welche Größe zu bestimmen ist, hängt von der Sachsituation und davon ab, an welcher Stelle in der Gleichung die gesuchte Größe steht.
- Letztendlich geht es darum, für Sachsituationen oder Vorgänge mit Mengenveränderungen die richtigen Gleichungen sowie die gesuchte/n Größe/n zu finden und diese zu errechnen.
- Umgekehrt lässt sich von Gleichungen auch auf Sachsituationen schließen.
- In vielen Situationen sind Sachprobleme mit mehr als zwei Teilmengen zu lösen. Die Teilnehmer*innen haben auch dazu mithilfe von Beispielen erkannt, dass die Lösungswege und die Fragestellungen analog zu Sachsituationen mit zwei Teilmengen sind und durch Zusammenfassen mehrerer Teilmengen zu einer größeren Teilmenge vereinfacht werden können.

Impressum

Herausgeber:

Projekt „Praxistransfer der DVV-Rahmencurricula Lesen, Schreiben und Rechnen“
Deutscher Volkshochschul-Verband e.V.
Königswinterer Str. 552b
53227 Bonn
info@dvv-vhs.de
www.volkshochschule.de

Verantwortlich: Julia von Westerholt

Autor*innen:
Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer
Dr. Alina Guther
Dr. Dagmar Grütte
Kora Deweis-Weidlinger

Projektteam:
Dr. Angela Rustemeyer, Projektleiterin

Annegret Ernst, Projektreferentin
Gisela Lorenz, Projektreferentin
Hanna Riedel, Projektreferentin
Sandra Krampe, Sachbearbeiterin
Sarah Huesmann, Sachbearbeiterin
Nina Diekmannshemke, Werkstudentin

Lektorat: Marisa Janson
Layout/Satz: zweiband.media, Berlin
Druck: Druckerei Flock, Köln

2., überarbeitete Auflage 2021

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.de abrufbar.

ISBN 978-3-942755-69-6


Deutscher
Volkshochschul-Verband
Einfach gut unterrichten.
Die DVV-Rahmencurricula
materialsuche.grundbildung.de
2.000 Seiten Unterrichtsmaterial für die Grundbildung.
Vielfach filterbar – probieren Sie es aus!
AlphaDekade
2016 – 2026
GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

GEFÖRDERT VOM

AlphaDekade 2016 – 2026

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Das diesem Heft zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen W143400 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt liegt beim Herausgeber.

Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Königswinterer Str. 552b
53227 Bonn

info@dvv-vhs.de
www.volkshochschule.de

Projekt „Praxistransfer der
DVV-Rahmencurricula Lesen, Schreiben
und Rechnen“

www.grundbildung.de