vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

Unterrichtskonzepte

Rechnen Stufe 2

Einfach gut unterrichten.
Die DVV-Rahmencurricula

Deutscher Volkshochschul-Verband

Unterrichtskonzepte

Rechnen Stufe 2

Einfach gut unterrichten.
Die DVV-Rahmencurricula

Inhalt

Vorwort		5
Wegweiser		6
9	IMMER ZEHN – DAS BÜNDELUNGSPRINZIP	15
	KOPIERVORLAGEN	56
11	ZAHLEN BIS 1.000	61
13	MULTIPLIKATION	131
	KOPIERVORLAGEN	164
Impressum		192

vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

Einfach gut unterrichten:
Die Online-Schulung zum DVV-Rahmencurriculum

Rechnen

Für Lehrkräfte in der Grundbildung – jederzeit und kostenfrei!

vhs-onlineschulung.de

AlphaDekade 2016 – 2026

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Vorwort

Voraussetzungen für das Rechnen mit zwei- und mehrstelligen Zahlen ist das Verständnis des Stellenwertsystems. Wenn Erwachsene große Probleme mit scheinbar leichten Rechenaufgaben haben, haben sie vielleicht in einem frühen Stadium des Rechnenlernens die Hierarchie der Einer, Zehner und Hunderter nicht verstanden.

Als Grundlage für den elementaren Rechenunterricht mit Erwachsenen haben Wissenschaftler*innen unter Federführung von Wolfram Meyerhöfer das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* entwickelt.
Das Stellenwertsystem zu verstehen ist der wichtigste Lernschritt auf der im Rahmencurriculum beschriebenen Kompetenzstufe 2. Sie umfasst im nächsten Schritt auch das Erlernen der Operationslogik der Multiplikation.

Die Unterrichtskonzepte in diesem Band zeigen Lehrkräften, wie sie das Stellenwertsystem eingängig und verständlich erklären, beginnend mit der Einführung des Bündelungsprinzips. Darüber hinaus erläutern sie, wie die Multiplikation durchschaubar gemacht und Hürden bei der Vermittlung des Kleinen Einmaleins genommen werden können.

Ein *Wegweiser* hilft den Lehrkräften, den individuellen Rechenproblemen ihrer Teilnehmer*innen entsprechend die passenden Unterrichtskonzepte auszuwählen. Alle Unterrichtskonzepte sind gleich aufgebaut: In einer Einführung werden Lernziele, typische Verständnisschwierigkeiten und Voraussetzungen für den Einstieg ins Thema beschrieben, die erforderlichen Lernmaterialien aufgeführt und Literaturhinweise gegeben. Es folgen kleinschrittige Unterrichtssequenzen mit Tipps für korrekte und gut verständliche Formulierungen, Hinweisen zu Methoden, Verweisen auf Aufgabenblätter und QR-Codes zu Online-Übungen.

Die Aufgabenblätter für die Lernenden stehen in einem eigenen Band zur Verfügung.

Wie die Unterrichtskonzepte und Aufgabenblätter zur Vermittlung elementarer Rechenkenntnisse genutzt werden können, erfahren Lehrkräfte auch in der Online-Schulung zum *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* (www.vhs-onlineschulung.de).

Symbole

St2 Stufe 2

Einzelarbeit

Partnerarbeit/Tandem

Gruppenarbeit

Diskussion

Vortrag

QR-Code: weiterführende Aufgaben zum online weiterüben

Wegweiser

Beobachtung	
Zahlverständnis und Rechenstrategien für Plus und Minus im Zahlraum bis 20	
Zahlen als Mengen verstehen (Der kardinale Zahlaspekt)	
TN kennt nicht unterschiedliche Verwendungsmöglichkeiten von Zahlen im Alltag (z. B. Anzahl, Position).	
TN unterscheidet nicht sicher zwischen Anzahl und Position (z. B. „fünf Würfel“ und „der fünfte Würfel“).	
TN kennt keine Kriterien zum Bilden von Gruppen, die sinnvoll zusammengefasst werden können.	
Mengen abzählen (Anzahlerfassendes Zählen)	
TN macht anhaltend Fehler beim Abzählen von Mengen.	
TN sagt die Zahlwortreihe (vorwärts bis ca. 20) fehlerhaft auf, z. B. mit Auslassungen.	
TN ordnet beim Abzählen nicht jedem Element genau ein Zahlwort zu (oder umgekehrt).	
TN weiß nicht sicher, dass bei geänderter Anordnung von Elementen deren Anzahl konstant bleibt.	
Menge – Zahlwort – Ziffer zuordnen (Zahldarstellungen)	
TN ordnet Mengenbilder, Ziffern und Zahlwörter einander nicht richtig zu.	
TN macht Fehler beim Schreiben von Ziffern (Spiegeln, Verwechseln …).	
Mengen und Zahlen vergleichen (Der relationale Zahlaspekt)	
TN macht Fehler in der Verwendung der Vergleichszeichen (>, <, =).	
TN vergleicht Mengen nicht mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung, sondern zählt immer ab.	
TN kennt Begriffe wie „mehr/weniger/gleich“ nicht oder versteht diese anders als erwünscht.	
TN beantwortet Fragen „Um wie viel ist … mehr als …?“ falsch oder versteht diese Fragestellung gar nicht.	
TN macht Fehler beim Ermitteln von Unterschieden von Mengen oder Zahlen.	
TN beantwortet Fragen „Was ist um 1 mehr/weniger als …“, „Was ist um 2 mehr/weniger als …“ falsch.	
TN kann Zusammenhänge zwischen Zahlen nicht korrekt beschreiben (z. B. „… ist um x mehr/weniger als …“).	
TN kann den Unterschied zweier Zahlen nicht durch Hinzufügen oder Wegnehmen ausgleichen.	
Mengen und Zahlen zerlegen (Teile-Ganzes-Verständnis)	
TN kennt keine anderen, unterschiedlichen Bezeichnungen für „Gesamtes“ und „Teile“.	
TN erkennt nicht, dass eine Summe gleich bleibt, wenn ihre Summanden gegensinnig verändert werden.	
TN kann Gesetzmäßigkeiten beim Verändern von Teilmengen nicht beschreiben.	
TN findet für eine Zahl keine oder nur wenige Zerlegungsmöglichkeiten.	
TN erkennt keine Zusammenhänge zwischen einzelnen Zahlzerlegungen.	

Alle Materialien finden Sie unter
www.materialsuche.grundbildung.de

Hier geht's zu
www.vhs-lernportal.de

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte

RC Rechnen Praxismaterial	vhs-Lernportal
Stufe 1	
AB 2.1 a Funktionen von Zahlen und Zahlnutzung	2.1 Zahlnutzungen
	2.2 Anzahl und Ordnungszahl
AB 2.2 a, 2.2 b, 2.2 c Oberbegriffe	2.2 Was kann man sinnvoll zusammenzählen?
	2.3 Zählfehler und Zählstrategien 4.3 Plus1-Trainer
	2.4 Zahldarstellung
AB 4.1 a Vergleichszeichen	4.1 Was ist Vergleichen?
AB 4.2 a Anzahlvergleiche AB 4.2 b Sind es gleich viele?	
AB 4.3 a … mehr/weniger als	4.2 Der Unterschied
	4.3 Seriation von Zahlen; Plus1-Trainer; Minus1-Trainer
AB 4.4 a Wie viele sind es mehr oder weniger?	
AB 4.4 b Unterschied von Zahlen	4.4 Zahlreihen
AB 5.1 a Begriffe „Gesamtes" und „Teile" AB 5.2 a Zahlzerlegungen, Anzahl und Einer	5.1 Gesamtes und Teile; Zahlzerlegungen 5.1 Gegensinniges Verändern
AB 5.2 b Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlenzerlegung AB 5.2 c Zahlzerlegungen	5.2 Zerlegungen in zwei oder mehrere Teilmengen; Darstellungsformen für Zahlzerlegungen
	5.3 Zahlzerlegungen und ihr Bezug zu Addition und Subtraktion 6.1 Bezüge zur Fünf 6.2 Bezüge zur Zehn

Beobachtung	
TN versteht den Zusammenhang von Zerlegen/Plus/Minus/Ergänzen nicht.	
TN hat die Zerlegungen aller Zahlen bis 10 nicht vollständig automatisiert.	
Plus und Minus verstehen (Operationsverständnis Addition und Subtraktion)	
TN kennt die Begriffe Summand und Summe nicht oder ordnet diese in einer Gleichung falsch zu.	
TN kennt die Begriffe Subtrahend, Minuend und Differenz nicht oder ordnet diese in einer Gleichung falsch zu.	
TN erstellt zu Mengenhandlungen (Plus/Minus) keine passenden Skizzen.	
TN schreibt Mengenhandlungen (Plus/Minus) nicht richtig als Gleichung auf.	
TN kann Additions- und Subtraktionsgleichungen nicht richtig mit Material darstellen.	
TN kann zu Additions- und Subtraktionsgleichungen keine Sachsituationen aus dem Alltag nennen.	
TN kann zu Sachsituationen aus dem Alltag (Plus/Minus) keine passenden Gleichungen aufschreiben.	
Nicht-zählende Rechenstrategien und Automatisierung (Plus und Minus im Zahlraum bis 20)	
TN kann Zahlen von 11 bis 20 nicht richtig lesen, aufschreiben oder in Zehner und Einer zerlegen.	
TN ist beim Rechnen überwiegend oder sogar völlig auf zählendes Rechnen, z. B. mit Fingern, angewiesen.	
TN macht gehäuft Fehler beim Plus- und Minusrechnen (z. B. „Fehler um eins“).	
TN nutzt automatisierte Plus-/Minusaufgaben nicht für Analogien (z. B. 5 + 3 für 15 + 3).	
TN nutzt automatisierte Plusaufgaben nicht für Nachbaraufgaben (z. B. 3 + 3 für 3 + 4).	
TN nutzt automatisierte Plusaufgaben nicht für Umkehrbaraufgaben (z. B. 7 + 7 für 14 – 7).	
TN nutzt das gegensinnige Verändern nicht als Lösungsstrategie (z. B. 3 + 3 für 2 + 4).	
TN hat Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 20 nicht vollständig automatisiert.	
Dezimales Stellenwertsystem – Zweistellige Zahlen verstehen	
Zehner und Einer verstehen (Bündelungsgedanke und Stellenwertschreibweise)	
TN sieht Zehn nicht als neue Größe „aus 10 Einern zusammengebaut“, sondern eher als eine Position („nach 9“).	
TN erkennt nicht die Vorteilhaftigkeit des Bündelns beim Abzählen großer Mengen oder macht dabei Fehler.	
TN macht Fehler beim Zerlegen zweistelliger Zahlen in ihre Stellenwerte (z. B. 64 = 6Z 4E).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen zweistelliger Zahlen aus ihren Stellenwerten (z. B. 5E 2Z = 25).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen zweistelliger Zahlen, wenn gebündelt werden muss (z. B. 2Z 14E = 34).	
Zweistellige Zahlen lesen und schreiben	
TN macht Fehler beim Schreiben zweistelliger Zahlen nach Diktat (v. a. Zahlendreher).	
TN macht Fehler beim Lesen zweistelliger Zahlen (v. a. Zahlendreher).	
TN schreibt die Zahl invers, also Einerziffer zeitlich vor der Zehnerziffer (evtl. wie in der Muttersprache).	
TN ist mit Besonderheiten der deutschen Zahlwortbildung nicht vertraut und daher unsicher (z. B. bei elf, zwölf, zwanzig, etc.).	

	Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte	
	RC Rechnen Praxismaterial	**vhs-Lernportal**
		6.3 Zahlzerlegungen und zugehörige Additions- und Subtraktionsaufgaben
		1±1-Trainer zur Zahlzerlegung
		3.1 Was ist Addieren
		3.2 Was ist Subtrahieren
	AB 7.1 a Sachsituationen Darstellung: bildlich und symbolisch AB 7.1 b Gleichungen und Rechengeschichten Bilder beschreiben	3.1 Additionen in Gleichungen 3.2 Subtraktionen in Gleichungen 3.3 Addition und Subtraktion als Umkehroperation
	AB 7.1 c Gleichungen zu Sachsituationen AB 7.1 d Situationen Gleichungen mit mehr als zwei Teilmengen	3.4 Anwendungen in Sachsituationen
		8.1 Aufbau der Zahlen bis 20
		8.2 Zahlbeziehungen und Analogien zum Rechnen nutzen
		8.3 Rechenstrategien und Lösungswege: Addition, Subtraktion und Zehnerübergang: Verdoppeln +/–1; gegensinniges Verändern
		1±1-Trainer: Additionen und Subtraktionen bis 20
	Stufe 2: Kapitel 9	
	AB 9.1 a Bündeln in Zehner AB 9.1 b Bündeln in Zehner und in Fünfer	9.1 Strukturen, Bündel, Muster, Einheiten
		9.2 Zehnerbündel im Stellenwertsystem
	AB 9.2 a Stellenwerte AB 9.2 b Stellenwerttabelle	
	AB 9.3 a Zahlenschreibweise Zahlendiktate (Zahlen ansagen und in den Taschenrechner eintippen lassen)	9.3 Zahlen hören und schreiben
		10.1 Bündelung, Entbündelung und Stellenwert-Umwandlungen

Beobachtung	
Orientierung im Zahlraum bis 100	
TN kennt verschiedene Darstellungsformen für zweistellige Zahlen nicht, z. B. Systemmaterial (Zehnerstangen, Einerwürfel) und Zahlenstrahl.	
TN stellt zweistellige Zahlen nicht richtig dar, z. B. mit Systemmaterial oder am Zahlenstrahl.	
TN benennt mit Material dargestellte zweistellige Zahlen falsch oder schreibt sie falsch.	
Vorteilhafte Rechenstrategien anwenden (Plus und Minus im Zahlraum bis 100)	
TN ist beim Plus- und Minusrechnen mit zweistelligen Zahlen auf Hilfsmittel (z. B. zählendes Rechnen, schriftliches Rechnen, Taschenrechner, …) angewiesen.	
TN kennt und nutzt keine nicht-zählenden Lösungsstrategien für Additionen und Subtraktionen im Zahlraum bis 100 (z. B. Analogien, Zehnervorteil, Zehnerstopp, gegensinniges Verändern, Verdoppeln +/–1, etc.).	
Dezimales Stellenwertsystem – Zahlen bis 1000 und große Zahlen verstehen	
Mehrstellige Zahlen verstehen (Bündelungsprinzip und Stellenwertprinzip erweitern)	
TN sieht Hunderter nicht als neue Größe („aus 10 Zehnern zusammengebaut“) an.	
TN versteht die fortgesetzte Zehnerbündelung nicht als Grundprinzip des dezimalen Stellenwertsystems und kann den Bündelungsgedanken nicht auf größere Stellenwerte übertragen (1 Z = 10 E, 1 H = 10 Z, 1 T = 10 H, etc.).	
TN stellt mehrstellige Zahlen nicht richtig dar, z. B. mit Systemmaterial, in der Stellenwerttafel oder am Zahlenstrahl.	
TN benennt dargestellte mehrstellige Zahlen falsch oder schreibt sie falsch auf.	
TN macht Fehler beim Zerlegen dreistelliger Zahlen in ihre Stellenwerte (z. B. 364 = 3 H 6 Z 4 E).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen dreistelliger Zahlen aus ihren Stellenwerten (z. B. 8 H 5 E 2 Z = 825).	
TN macht Fehler beim Zusammensetzen dreistelliger Zahlen, wenn gebündelt werden muss (z. B. 2 H 14 Z = 340).	
TN macht Fehler im Umgang mit der Null als Platzhalter (z. B. 3 H 7 E = 307).	
TN macht Fehler beim Lesen und Schreiben dreistelliger Zahlen.	
Orientierung im Zahlraum bis 1000	
TN nennt falsche Nachbarzahlen.	
TN macht Fehler beim Runden zwei- oder dreistelliger Zahlen.	
TN versteht nicht, wofür das Runden im Alltag gut ist, und wendet es nicht für Überschlagsaufgaben an.	
Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 1000 ohne schriftliche Normalverfahren	
TN kennt und/oder nutzt keine vorteilhaften Lösungswege (z. B. gegensinniges Verändern bei Addition, gleichsinniges Verändern bei Subtraktion, stellenweises Rechnen, schrittweises Rechnen).	
TN nutzt keine Hilfsmittel zur Lösungsfindung bzw. zur Darstellung der eigenen Lösungswege (z. B. Rechenstrich, halbschriftliches Rechnen mit Notieren der Zwischenschritte).	
Dezimalsystem auf beliebig große Zahlen erweitern	
TN kann die einzelnen Stellen bis mindestens Million nicht richtig benennen.	
TN kann große Zahlen nicht richtig lesen und schreiben.	
TN kann große Zahlen nicht richtig addieren oder subtrahieren.	

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte	
RC Rechnen Praxismaterial	**vhs-Lernportal**
AB 9.4 a Darstellung von Zahlen	9.4 Zahlen visualisieren
	10.1 Bündelung, Entbündelung und Stellenwert-Umwandlungen
	10.2 Addition und Subtraktion: Vorteilhaftes Rechnen
Stufe 2: Kapitel 11	
AB 11.1 a Das Dezimalsystem: Bündelung großer Mengen AB 11.2 a Stellenwerte umwandeln, Zahlwörter schreiben	11.1 Bündelungen und Aufbau der Zahlen bis 1000 11.2 Konstruktion des Dezimalsystems 11.3 Stellenwertumwandlungen, Zahlzerlegung von dreistelligen Zahlen 11.4 Zahlen sprechen, hören, schreiben
AB 11.1 b Zahlen ordnen und Nachbarn finden	
AB 11.5 a Runden, schätzen und überschlagen	11.5 Runden, schätzen und überschlagen
	11.6 Addition und Subtraktion ohne Zehner-/Hunderterübergang
	11.7 Addition und Subtraktion mit Zehner-/Hunderterübergang
	12.1 Erweiterung des Dezimalsystems
	12.2 Zahlen hören, sprechen und schreiben
	12.3 Addition und Subtraktion

Beobachtung	
Multiplikation	
Malnehmen verstehen (Operationsverständnis Multiplikation)	
TN kennt die Begriffe Faktor und Produkt nicht oder ordnet diese in einer Gleichung falsch zu.	
TN stellt gegebene Multiplikationsgleichungen nicht passend dar (Materialhandlung oder Skizze).	
TN schreibt dargestellte Multiplikationsaufgaben nicht richtig als Rechnung auf.	
TN findet zu Malaufgaben keine alltagsrelevanten Sachsituationen.	
TN nennt zu alltagsrelevanten Sachsituationen nicht die passenden Multiplikationsaufgaben.	
Einmaleins-Aufgaben vernetzen und merken (Automatisierung des Einmaleins)	
TN hat die Kernaufgaben Zweimal, Fünfmal und Zehnmal nicht automatisiert.	
TN kann Zusammenhänge zwischen einzelnen Malaufgaben nicht beschreiben (z. B. $6 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 8$).	
TN nutzt keine oder falsche Ableitungswege zum Ermitteln von Einmaleins-Aufgaben.	
TN hat das kleine Einmaleins nicht ausreichend automatisiert.	
TN kann zweistellige Zahlen nicht im Kopf verzehnfachen oder verhundertfachen.	
TN nutzt für das Große Einmaleins keine Ableitungsstrategien (z. B. $14 \cdot 8 = 10 \cdot 8 + 4 \cdot 8$).	
Anteile, Brüche und Prozentsätze	
Anteile	
TN kann Anteile nicht auf verschiedene Arten benennen oder darstellen.	
TN kann Anteile unterschiedlicher Gesamtheiten nicht miteinander vergleichen.	
Zusammenhang Prozent – Bruch – Dezimal	
TN kann Darstellungen von Anteilen nicht auf unterschiedliche Art (Bruch, Dezimalzahl und Prozent) benennen.	
Prozentrechnung am Prozentstreifen und mittels Dreisatz	
TN kennt die Begriffe der Prozentrechnung nicht oder wendet sie nicht richtig an.	
TN schätzt an Beispielen Prozentsätze und Prozentwerte nicht sinnvoll ab.	
TN kann Prozentsätze und Prozentwerte eines Ganzen nicht am Prozentstreifen darstellen.	
TN kann den Dreisatz als Methode zur Prozentrechnung nicht nutzen.	
TN kann komplexe Beispiele zu vermindertem und vermehrtem Grundwert nicht berechnen.	

Empfehlungen für individuelle Entwicklungsschritte

RC Rechnen Praxismaterial	vhs-Lernportal
Stufe 2: Kapitel 13	
AB 13.1 a Multiplikationsaufgaben zuordnen AB 13.1 b Rechenskizze: Orangen AB 13.1 c Rechenskizze: Neuwagen und Stifte AB 13.1 d Teilmengen: Friedas Kekse AB 13.1 e Teilmengen: Badezimmerfliesen und Kinobesuch AB 13.1 f Operationslogik: Lippenstifte AB 13.1 g Operationslogik: Eiaufstrich	13.1 Operationslogik der Multiplikation
AB 13.2 a Zweimal-Aufgaben AB 13.2 b, 13.2 c Fünfmal-Aufgaben	
	13.2 Das kleine Einmaleins
Karteikarten zum individuellen Üben	Einmaleins-Trainer komplett
	13.3 Verzehnfachen und Verhundertfachen
	13.4 Multiplikation größerer Zahlen
Stufe 3: Kapitel 17	
17.1 Kopiervorlage 1	
17.4 Kopiervorlage 1 und 2	
AB 17.5 a Abschätzen und Uploadstreifen	
AB 17.5 b Prozentrechnung am Prozentstreifen	
AB 17.5 c Prozentrechnung mithilfe des Dreisatzes	
AB 17.5 d Prozentrechnung mit vermindertem und vermehrtem Grundwert	

Einfach lernen.
Die DVV-Rahmencurricula

www.grundbildung.de

Rechnen lernen in der vhs

27

- [ ] zweizigsieben
- [x] zweizehnsieben
- [ ] siebenundzwanzig

Stimmt das?

vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

AlphaDekade 2016 – 2026

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

IMMER ZEHN – DAS BÜNDE-LUNGSPRINZIP

9

9 IMMER ZEHN – DAS BÜNDELUNGSPRINZIP

Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer
überarbeitet von Kora Deweis-Weidlinger

Didaktische Ziele

- grundlegende Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem gewinnen
- Verständnis des Bündelungsprinzips aufbauen/festigen (Das „Zehner-System" verwendet 10 Ziffern, von 0 bis 9, um Anzahlen beliebiger Größe schriftlich festzuhalten: je 10 von einer Einheit werden gebündelt zu 1 von der nächstgrößeren Einheit (10 Einer ergeben 1 Zehner, 10 Zehner ergeben 1 Hunderter usw.)
- Verständnis des Stellenwertprinzips aufbauen/festigen (Je nach Position hält dieselbe Ziffer unterschiedliche Werte fest; 3 kann für 3, 30, 300, 3000 etc. stehen. Der Wert einer Ziffer wird beim Weitergehen um eine Stelle nach links jeweils verzehnfacht. Die Stellenwerttabelle wird vorgestellt und die Rolle der Null als Platzhalter wird geklärt.)
- Zahlwortreihe bis 100 kennen (Besonderheiten der deutschen Zahlensprechweise bis 100)
- Zweistellige Zahlen lesen und schreiben
- verschiedene Möglichkeiten der Darstellung zweistelliger Zahlen kennen (Mehrsystemblöcke, Hunderterfeld/-tafel, Zahlenstrahl...)

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zählen zur Anzahlerfassung unter Einhaltung der Zählprinzipien
- Zahlen als Mengen (Kardinaler Zahlbegriff) und als Zusammensetzungen verstehen („Teile-Ganzes-Verständnis" als Grundlage für ein Verständnis des Zehners als Zusammensetzung aus 10 Einern)
- Da dieses Kapitel auf Einsicht in Bündelungsprinzip und Stellenschreibweise abzielt (Rechnen mit Zahlen bis 100 wird nicht thematisiert), stellt Rechnen keine Voraussetzung für dieses Kapitel dar!

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Der Zahlbereich wird von 10 auf 100 erweitert. Zunächst mit Mengenbetrachtungen. Um die Anzahl der Elemente größerer Mengen zu erfassen, hilft das *Bündeln* in Zehnereinheiten. Dieses Zusammenfassen von zehn Einern zu einem Zehner und das Zusammenfassen von zehn Zehnern zu einem Hunderter kann vielfältig visualisiert werden. Den Teilnehmer*innen soll es dabei gelingen, die in den Darstellungen erkannte Ordnung und Struktur zu verallgemeinern und auf das Zahlsystem zu übertragen.

In den vorangegangenen Kapiteln wurde der Zahlbereich bis zehn als eine Einheit dargestellt.

Alle Zahlbeziehungen von eins bis zehn sind so grundlegend, dass sie sich auf größere Zahlen (Zahlbereiche) übertragen lassen. Die Einteilung der Unterrichtskonzepte in Zahlbereiche bis 10, bis 100, bis 1000 usw. ergibt sich einerseits aus Erfahrungen des mathematischen Unterrichtens, andererseits aus der Struktur des Dezimalsystems, das es hier zu erarbeiten und zu verstehen gilt.

Schwerpunkt dieses Kapitels ist es, eine weitere grundlegende Erkenntnis zu erarbeiten: Zehn Einer werden zu einer neuen Einheit zusammengefasst. Dabei von einem *Bündelungsprinzip* zu sprechen, trifft den Kern sehr gut, denn zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt. Das Wort *Bündeln* lässt die Schlussfolgerung zu, wie eng Mengenebene und Zahlenebene miteinander verknüpft sind. *Etwas zu bündeln*, assoziiert eine *Mengenhandlung*. Tatsächlich kann diese Bündelung zum Beispiel sehr gut auf den Umgang mit Geld übertragen werden – Geldbündel. Dennoch soll im Endeffekt das System Einer und Zehner *auf der Zahlenebene* verstanden werden.

Die Zehn ist die maßgebliche Bezugseinheit für das gesamte, heute gebräuchliche *dezimale Zahlsystem*. Zehn Einer werden zu einem Zehner zusammengefasst. Zehn Zehner werden zu einem Hunderter zusammengefasst. Zehn Hunderter zu einem Tausender usw. Entlang dieses Bündelungsprinzips ist das *Stellenwertsystem* aufgebaut. Die Bündel werden Stellen zugeordnet.

Es ist ein Ordnungsprinzip, das Zahlen strukturiert und aus dem die Werte der Zahlen ablesbar sind. Alle Zahlen im dekadischen Zahlsystem können mit nur zehn Ziffern notiert/konstruiert werden.

Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben. Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Zehnerstelle. Die Zahl ist zweistellig. Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig. Das Stellenwertsystem ist damit beliebig erweiterbar. Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.

Die Schreib- und Sprechweisen der Zahlen bis 100 weisen einige Unregelmäßigkeiten auf. Bedeutend ist die Erkenntnis, dass die Zehner und Einer in einer anderen Reihenfolge aufgeschrieben werden als das Zahlwort gesprochen wird: Für dreizehn wird 13 aufgeschrieben, für vierundsechzig wird 64 aufgeschrieben.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Das geniale Zahlsystem, basierend auf der Zehn, zu entwickeln, dauerte sehr, sehr lange. Jahrhunderte. Die Teilnehmer*innen sollen jetzt das Dezimalsystem in all seiner Komplexität in Kürze erfassen und verstehen. Das ist eine große Herausforderung.

Die Zahlenschreibweise weicht von der Sprechweise ab. Das ist verwirrend und bereitet vielen Menschen im Umgang mit Zahlwörtern und mehrstelligen Zahlen Schwierigkeiten. Geschrieben wird zuerst der Zehner und danach der Einer – 32 (also drei zwei). Gesprochen wird zuerst der Einer und danach der Zehner – zweiunddreißig. Häufig lehnen Teilnehmer*innen die Notation an die Sprechweise an und schreiben zunächst den Einer auf und danach den Zehner. Richtig ist es, den Zehner vor dem Einer zu schreiben. Die Verwirrung, die sich ergeben kann, manifestiert sich in sogenannten Zahlendrehern. Sechsundvierzig wird dabei möglicherweise als 64 notiert – die Sechs wird demnach zuerst gesprochen *und* geschrieben.

Manche Teilnehmer*innen werden auch weiterhin Schwierigkeiten haben, in Mengenbetrachtungen und Zahlbetrachtungen zu differenzieren. Zahlbetrachtungen sind mentale Konstrukte, die sich einigen Teilnehmer*innen langsamer erschließen. Bezüge zu Mengen sind zunächst fassbarer. Zusammenhänge können mit Material oder Visualisierungen direkt und reproduzierbar belegt werden. In mentalen Konstrukten diese Reproduzierbarkeit und die Zahlbeziehungen zu erkennen, stellt eine große Herausforderung dar.

Einige Teilnehmer*innen werden noch immer zählen. Zählende Lösungen von Rechenaufgaben sind nicht mehr angebracht, wenn verstanden wurde, welche Beziehungen Zahlen zueinander haben, wie Zahlen zu zerlegen sind und was es mit Rechenoperationen auf sich hat.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Voraussetzung, um sich den Zahlbereich bis 100 zu erschließen, sind Basiskenntnisse über den Zahlbereich bis 10. An dieser Stelle haben die Teilnehmer*innen Zahlen bereits als mentale Konstrukte verstanden und es ist ihnen möglich, Mengenbezüge immer wieder herzustellen.

Bekannt ist:
- Zahlen können in Einer zerlegt werden.
- Vorgänger und Nachfolger einer Zahl unterscheiden sich um genau eins von der Zahl.
- Die Einer können unterschiedlich zusammengefasst werden, sodass Zahlen in andere Zahlen zerlegt werden können.
- *Immer einer mehr führt* zu immer größeren Zahlen.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Gaidoschik, Michael (2015): Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien. (8. Auflage) S. 162 ff.
  Das Buch von Michael Gaidoschik ist bestens geeignet, um weitere didaktische Erläuterungen nachzulesen. *(Es wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.)*
- Kutzer, Reinhard (2001): Mathematik entdecken und verstehen. Band 2. Frankfurt am Main. S. 71 ff.
  Reinhard Kutzer gibt viele Anregungen zum *Bündeln*.
- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  - Zum Zahlbereich bis 30: Stufe 1, S. 39 ff.
  - Die Begriffe Zehner/Einer werden auf Stufe 1 S. 40 eingeführt.
  - Die Grundlagen für das Verständnis zweistelliger Zahlen werden in Stufe 2 ab S. 51 didaktisch erläutert.
  - Zu Bündelung und Stellenwerten: Stufe 2 – Speziell die S. 52 ff.
  - Zur Benennung zweistelliger Zahlen: Stufe 2, S. 55 f.

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Steckwürfel
- Holzwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten – Mehrsystemblöcke, z. B. Dienes-Material
- Chips, Knöpfe o. Ä. – Gefäße zur Bündelung (kleine Dosen, Teller, Schachteln)
- Spielgeld
- Zehnerwürfel
- Metermaß mit Zentimetereinteilung
- Lineal mit Millimeter- und Zentimetereinteilung
- Uhr mit beweglichen Stunden- und Minutenzeigern

9.1 Strukturen, Bündel, Muster, Einheiten

EXPLORATION

Die Anzahl einer größeren Menge lässt sich leichter bestimmen, wenn Elemente *gebündelt* werden. Die Menge wird strukturiert. Damit werden Verzählfehler bei Anzahlbestimmungen minimiert. Wird jedes Element einzeln gezählt, kann der Prozess der Anzahlbestimmung sehr lange dauern. Die Zahlwortreihe wird innerlich aufgesagt. Jedes einzelne Element darf dabei nur einmal gezählt werden (meistens wird es angetippt). Je größer die Mengen werden, umso konzentrierter muss agiert werden. Verzählfehler sind nicht ausgeschlossen. Oft muss mehrfach gezählt werden. Werden jedoch die Elemente zu Zehnerbündeln zusammengefasst und damit geordnet, vereinfacht sich das Zählen immens (vgl. RC Rechnen, Stufe 1, S. 39 ff.).

9.1.1 Gruppenarbeit – Zehn Elemente bündeln

Didaktische Ziele
- Beim Abzählen großer, unstrukturierter Mengen den Vorteil des Zusammenfassens („Bündelns") von immer zehn Elementen entdecken
- Durch das selbständige Bilden von Zehnern und das nachfolgende Eintragen von Zehnern und Einern in ein Stellenraster einen Zusammenhang zwischen Zehnerbündelung und Zahlenschreibweise herstellen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Teilnehmer*innen werden in Gruppen von je drei bis vier Personen eingeteilt. Im Raum werden Tische so aufgestellt, dass sich je eine Gruppe um einen Tisch platzieren kann. Auf manchen Tischen liegt eine große Menge Steckwürfel, jeweils nicht mehr als 99.

Die Kursleitung erläutert die Aufgabe:

> *Bitte bestimmen Sie die genaue Anzahl der Elemente auf Ihrem Tisch. Wie viele sind es? Tauschen Sie sich in Ihrer Gruppe aus, wie man am besten zählt. Sind Sie sicher, dass Sie sich nicht verzählt haben? Wenn ja, wie begründen Sie das?*

Mögliche Herangehensweisen der Teilnehmer*innen können sein:
- Ein Gruppenmitglied zählt jedes Element und schiebt dieses dabei etwas zur Seite. Damit wird ausgeschlossen, dass ein Element doppelt gezählt wird.
  Möglicherweise prüft ein weiteres Gruppenmitglied, ob die ermittelte Zahl korrekt ist, und zählt erneut. Die Anzahl wird in der Regel korrekt bestimmt. Der Prozess des Zählens nimmt einige Zeit in Anspruch.
- Jedes Element wird durch Antippen gezählt. Häufig muss der Zählprozess neu gestartet werden, weil die Teilnehmer*innen nicht sicher sind, welches Element bereits gezählt wurde. Möglicherweise liegt im Ergebnis ein Verzählfehler vor.
- Manche Zählungen werden durch die Frage unterbrochen: „Wo war ich gerade?"
- Es ist eine hohe Konzentrationsleistung, einen vielschrittigen Zählprozess durchzuführen. Dabei sind die Teilnehmer*innen häufig nicht sicher, ob das Ergebnis stimmt.
- Dem Team ist bereits der Bündelungsprozess vertraut und es bildet zum Beispiel Fünfer- oder Zehnergruppen. Diese werden anschließend zusammenfassend in Fünfer- oder Zehnerschritten gezählt und die übrig gebliebenen Einer weiterzählend ergänzt.

In einer losen Runde, am besten stehend um den jeweiligen Tisch, erläutern sich die Gruppen gegenseitig, wie sie vorgegangen sind, und stellen für sich fest, welche Vorgehensweisen geschickt und welche fehleranfällig sind.

Falls keines der Teams die Anzahlbestimmung mithilfe von Zehnergruppen vorgeschlagen hat, regt die Kursleitung an, dass jeweils zehn Elemente zu einem Zehner zusammengefasst werden können, und bittet die Teilnehmer*innen, es selbst zu probieren.

Möglicherweise gibt es Teilnehmer*innen, denen der Zählprozess bis 100 noch nicht vertraut ist. Die Kursleitung beobachtet unter diesem Aspekt vor allem die zurückhaltenden Teilnehmer*innen. Für diesen Fall wird auf das Kapitel Zahlen hören, sprechen und schreiben verwiesen (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 9.3).

Es werden jeweils zehn Steckwürfel zu einer Zehnerstange gesteckt. Zum Beispiel liegen 54 Steckwürfel auf dem Tisch. Es wird ermittelt, wie viele Zehnerstangen gebündelt werden können: fünf Zehnerstangen. Anschließend wird in Zehnerschritten gezählt: zehn, zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig. Die übrig gebliebenen vier Einer werden dazugezählt: 51, 52, 53, 54. Vier Einer sind nicht ausreichend, um in einer Zehnerstange zusammengefasst zu werden. Die ermittelte Zahl wird mit dem Ergebnis der ersten Übung verglichen. Die Kursleitung fragt nach, welchem Ergebnis die Teilnehmer*innen mehr trauen.

In einer Tabelle an der Tafel wird die Anzahl der Steckwürfel folgendermaßen vermerkt:

Zehnerstangen – Steckwürfel	Übrige Einer
Zehner	Einer
5	4

Die Kursleitung weist bei den Notationen darauf hin, dass bei Variante 1 fünf Zehnerstangen gesteckt/gebündelt wurden. Es wurden fünf *Zehner* gebündelt und notiert. Vier Einer konnten nicht zu einer Zehnerstange zusammengefasst werden und diese wurden deswegen als *Einer* notiert. Die Kursleitung hebt hervor, dass das Zusammenfassen (Zusammenstecken) der Einer zu Zehnern auch *als Bündeln von Einern zu Zehnern* bezeichnet wird.

Die Teams sollten für weitere, größere Mengen (maximal 99 Elemente) die Anzahlen bestimmen. Es eignen sich neben den Steckwürfeln und dem Holzmaterial auch Chips, Stifte, Knöpfe usw. Außerordentlich wichtig ist es für die Teilnehmer*innen, es tatsächlich zu tun — also selbst Einer zu Zehnern zu bündeln. Diese Handlungen am Material erhöhen die Chance, dass die Bündelung von Einern zu Zehnern langfristig verstanden wird.

Die Kursleitung variiert dafür das Material:

- Steckwürfel: Übungen mit Steckwürfeln haben den Vorteil, dass zehn einzelne Steckwürfel direkt zu einer Stange zusammengesteckt werden können. Sie haben allerdings auch den Nachteil, dass nicht auf einen Blick erkennbar ist, dass hier genau zehn Elemente gebündelt sind (und nicht etwa 8 oder 9 oder 11). Die Zehnheit muss also sprachlich gekennzeichnet werden.

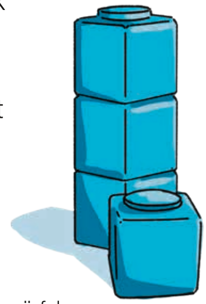


Abbildung 9.1-1 Beispiel für Steckwürfel

- Sogenannte Mehrsystemblöcke oder Ein-Euro-Münzen/Zehn-Euro-Scheine: Bei den Mehrsystemblöcken können, ähnlich wie beim Geld, zehn Einer (Holzwürfel) in einen Zehner (Zehnerstange) *getauscht* werden.
- Auch hier ist es wichtig, den Tausch tatsächlich zu vollziehen, weil dieses *Tauschen* bei Stellenwertumwandlungen vollzogen wird – allerdings dann mental.

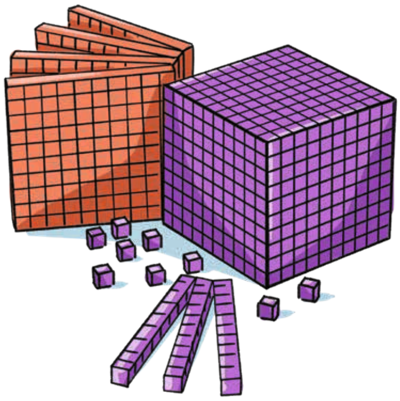


Abbildung 9.1-2 Beispiel für Mehrsystemblöcke

Abbildung 9.1-3 Beispiel für Spielgeld

- Material, das nicht gebündelt (zusammengesteckt) oder in Zehnerbündel (Zehnerstangen, Zehn-Euro-Scheine) getauscht werden kann, sollte in Gefäße gebündelt/geordnet werden, z. B. Knöpfe in kleinen Dosen o. Ä.

Möglicherweise fällt den Teilnehmer*innen bereits an dieser Stelle der Zusammenhang zwischen Zehnerbündelung und Zahlenschreibweise auf: Bei der Zahl 54 stehen die gebündelten Zehner an erster Stelle (links) und die ungebündelten Einer an zweiter Stelle (rechts).

Die Kursleitung beobachtet die Handlungen und den Austausch untereinander, vor allem um festzustellen, wer nicht aktiv ist und möglicherweise nicht bis 100 zählen kann.

Jeweils ein Teammitglied fasst die Ergebnisse am jeweiligen Tisch für alle mündlich zusammen.

Nachfragen der Kursleitung könnten sein:

Wie viele Zehner haben Sie gebündelt? Wie viele Einer konnten Sie nicht bündeln? Welche Anzahl ergibt das? Wie schreiben Sie die Zehner und Einer auf?

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Um bei unstrukturierten Mengen die Anzahl der Elemente zu bestimmen, werden immer zehn Elemente zu einem Zehner zusammengefasst, oder anders gesagt: gebündelt.
- Danach können zunächst die gebündelten Zehner und dann die ungebündelten Einer gezählt werden.
- Die ermittelte Anzahl wird in ein vorgegebenes Stellenraster eingetragen.

9.1.2 Partnerarbeit und Kursgespräch – Bündeln und Entbündeln mit Spielgeld

Didaktisches Ziel
Idee der Bündelung an Geld als alltagspraktisches Beispiel kennenlernen

EXPLORATION

Bei den nächsten Aufgaben sollen die Teilnehmer*innen weitere Bündelungen und Entbündelungen (an Spielgeld) oder gedanklich vornehmen. Spielgeld bietet sich an, um auf die Vorkenntnisse der Teilnehmer*innen einzugehen und auch unterschiedliche Bündelungen, also nicht nur Zehnerbündelungen zu thematisieren.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Teilnehmer*innen werden in Zweierteams eingeteilt. Jedes Team bekommt Spielgeld. Es sollten sowohl 100 €-, 50 €-, 20 €-, 10 €- und 5 €-Scheine als auch 2 €- und 1 €-Münzen in ausreichender Zahl vorhanden sein.

Dann wird **Kopiervorlage 1** ausgeteilt.

Bei den ersten drei Aufgaben sollte überlegt werden, in welche Scheine bzw. Münzen eine vorgegebene Anzahl an 1-Euro-Münzen umgetauscht werden kann. Dies kann natürlich auch handelnd mit Spielgeld gemacht werden. Außerdem sollten mehrere Varianten überlegt werden, in die man die entsprechende Anzahl an 1-Euro-Münzen wechseln kann. Diese Varianten sollten dann notiert werden.

Die Aufgaben 4 bis 7 sehen ähnliche Beispiele vor, wobei jetzt ein Geldbetrag genannt ist und überlegt werden sollte, in welcher Form (also wie viele Scheine und Münzen welcher Art) dieser gegeben sein kann.

Die Aufgaben 8 und 9 sollen zum Nachdenken über die Bündelungen und Entbündelungen mit Geld und deren Nutzen anregen. Dabei sollte unter anderem darüber nachgedacht werden, warum es überhaupt so viele unterschiedliche Münzen und Scheine gibt.

Fragen zur Unterstützung bei Verständnisproblemen:

Wie viele 1 €-Münzen brauchen Sie, um dafür einen 5 €-Schein (10 €-Schein etc.) zu bekommen?
Wie viele 1 €-Münzen können Sie nicht umtauschen?
Können Sie die 2 €-Münzen (5 €-Scheine etc.) wieder in eine größere Einheit umtauschen? Wie viele Münzen/Scheine brauchen Sie dafür?
Wie viele 1 €-Münzen bekommen Sie für einen 5 €-Schein (10 €-Schein etc.)?

Nach der individuellen Bearbeitung in den Teams, sollten die Aufgaben im Plenum besprochen werden. Dabei ist darauf zu achten, dass möglichst viele unterschiedliche Umwechslungen genannt werden. Außerdem kann über eine passende Form der Notation gesprochen werden.

So können 17 1 €-Münzen beispielsweise folgendermaßen getauscht werden, es sind aber auch noch andere Varianten denkbar:

20 €-Scheine	10 €-Scheine	5 €-Scheine	2 €-Münzen	1 €-Münzen
	1	1	1	
		3		2
	1		3	1
			8	1
		2	2	3

Es sollten mit den Teilnehmer*innen auch die unterschiedlichen Bündelungen thematisiert werden und erwähnt werden, dass eben nicht nur Zehnerbündel, sondern auch andere möglich sind. Einige der Bündel werden jedoch nicht in gleicher Weise fortgeführt. So lassen sich beispielsweise 10 Zehn-Euro-Scheine in einen Hundert-Euro-Schein umtauschen, 5 Fünf-Euro-Scheine, jedoch nicht in einen 25-Euro-Schein.

Lernziele zu Kopiervorlage 1
Bei den Aufgaben der Kopiervorlagen geht es primär darum, die Vorkenntnisse der Teilnehmer*innen zum Thema Bündeln und Entbündeln zu aktivieren. Gerade im Zusammenhang mit (Spiel-)Geld kann davon ausgegangen werden, dass solche (Ent-)Bündelungsprozesse bereits bekannt sind. Dabei sollten nicht nur Zehnerbündelungen thematisiert werden, was durch den Kontext des Spielgeldes vermutlich naheliegend ist, sondern auch andere Bündelungen gemacht und über diese nachgedacht werden. Dies sollte dazu führen, dass das Prinzip des Bündelns bewusster wahrgenommen wird.

9.1.3 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Bündeln in Zehner

Didaktisches Ziel
Durch Vergleichen verschiedener Bündelungen (z. B. Zehner oder Fünfer) Einsicht in die Vorteilhaftigkeit der Zehnerbündelung erarbeiten/festigen (Werden Zehnerbündelungen und übrige Einer nebeneinander geschrieben, lässt sich unmittelbar eine Zahl ablesen, während mit Fünferbündeln nur mittels Rechnung auf die Anzahl geschlossen werden kann.)

EXPLORATION

Die bisher an greifbarem Material durchgeführten Bündelungen vollziehen die Teilnehmer*innen in einem nächsten Abstraktionsschritt mit visualisierten Mengen.

Ziel der Bearbeitung des **Aufgabenblattes 9.1 a** (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) ist es, herauszuarbeiten, dass mithilfe der Zehnerbündelung sofort auf die Anzahl geschlossen werden kann. Werden gebündelte Zehner und ungebündelte Einer nebeneinander geschrieben, ergibt sich direkt die Zahl, die für die Anzahl steht.

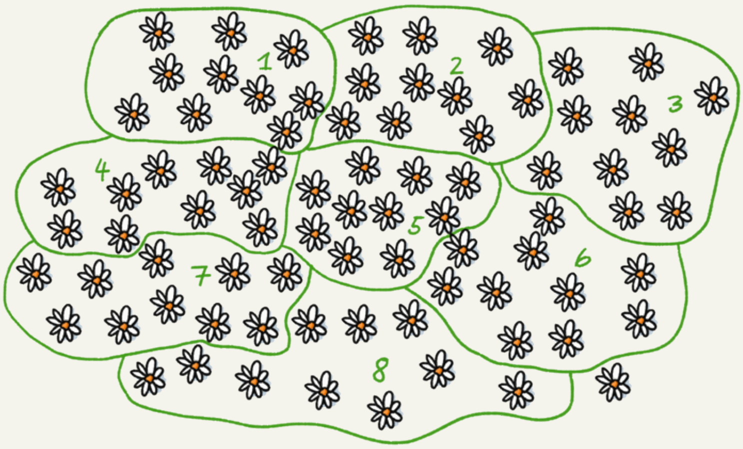
Parallel verdeutlichen sich die Teilnehmer*innen, dass in einem Bündel immer eine entsprechende Anzahl von Einern zusammengefasst wurde: Im Zehner sind zehn Einer enthalten.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 9.1 a

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, das **Aufgabenblatt 9.1 a** zu bearbeiten. Eine Blütenmenge soll gebündelt werden. Dafür werden die entsprechenden Bündel mit einem Stift eingekreist. Zunächst werden Zehnerbündel mit einem Stift umrundet. Danach ermitteln die Teilnehmer*innen die Anzahl der umrundeten Zehner und tragen diese in die entsprechende Spalte der Tabelle ein. Anschließend wird die Anzahl der nicht gebündelten Blüten in die Spalte der Einer eingetragen. Nachdem alle Teilnehmer*innen die Aufgaben umgesetzt haben, wird im Unterricht besprochen, was dabei aufgefallen ist.

Die Kursleitung präsentiert nachfolgend eine mögliche Lösung – Teil 1.



Zehnersträuße	Einzelne Blüten
Zehner	Einer
8	*1*

Anzahl	*81*

Abbildung 9.1-4 Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1 a – Teil 1

Die Kursleitung beschreibt, wie sie vorgegangen ist, um die zehn Blüten auf dem Aufgabenblatt zu umrunden:

Man kann z. B. immer fünf Blüten und weitere fünf Blüten mit den Augen erfassen und die beiden Fünfermengen mit dem Stift umkreisen. Man kann auch vier, vier und zwei Blüten mit den Augen erfassen oder drei, drei, drei und eine Blüte. Denn man kann die Zahl 10 in fünf und fünf (oder vier/vier/zwei oder drei/drei/drei/eins u. a.) zerlegen. Wenn man immer zehn abzählt, braucht man länger und muss sich mehr konzentrieren.

Die Kursleitung fragt nach, wie die Teilnehmer*innen vorgegangen sind.

Beim Notieren der Anzahl in die vorgesehene Tabelle fällt auf, dass die Zehner (8) links aufgeschrieben werden und die ungebündelten Einer (1) rechts. Das stimmt direkt mit der Zahl 81 überein. Im Umkehrschluss heißt das, dass auf der linken Seite der Zahl gebündelte Zehner stehen (nämlich acht Zehner) und auf der rechten Seite ungebündelte Einer (nämlich ein Einer).

EXKURS

Manche Teilnehmer*innen konnten sich in ihren früheren Lernprozessen nicht die Struktur des Stellenwertsystems erschließen, weil ihnen nicht klar war, warum gerade immer zehn gebündelt werden. Ihnen hilft vielleicht die Erkenntnis, dass es eine Art historischer Zufall ist, dass ausgerechnet immer zehn Einheiten zu einer neuen Einheit gebündelt werden. Dies ist keineswegs notwendig. In Sprachgemeinschaften mit germanischer Abstammung zeugen beispielsweise die noch nicht zusammengesetzten Zahlwörter ‚elf' und ‚zwölf' sowie Begriffe wie ‚Duzend' davon, dass hier historisch auch Zwölferbündelungen verbreitet waren. Die Zehn hat sich wahrscheinlich durchgesetzt, weil allen Menschen mit zehn Fingern ein gutes Hilfsmittel zum Rechnen im Zehnersystem zur Verfügung steht.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Die Bündelung von immer zehn Einern zu einem Zehner erleichtert die Anzahlbestimmung in größeren ungeordneten Mengen.
- Wird die ermittelte Zahl der Zehner links notiert und die Zahl der ungebündelten Einer rechts notiert, ergibt sich direkt und ohne Rechenvorgang die leicht abzulesende Zahl (Anzahl) der Elemente dieser ungeordneten Menge.

9.1.4 Aufgabenblatt 9.1 b und Kursgespräch – Bündeln in Zehner und in Fünfer

Didaktische Ziele

- Zusammenhang von Fünferbündeln und Zehnerbündeln erkunden, dabei die Einsicht festigen, dass Mengen in verschieden große Einheiten gebündelt werden können
- Entdecken, dass in jedem Zehnerbündel zwei Fünferbündel sind

EXPLORATION

In bereits geordneten Mengen fällt die Bündelung leichter. Wenn eine Fünfer- oder Zehnermenge, zum Beispiel durch Umrunden mit einem Stift, ermittelt wird, kann optisch schnell auf die nächste Bündelungsmenge geschlossen werden, denn die Elemente sind wie ein Muster abgebildet. Auf das bereits vorliegende Muster kann das Bündelungsmuster übertragen werden. Dass Zehnerbündelungen gut geeignet sind, um Anzahlen größerer Mengen zu ermitteln, sollte den Teilnehmer*innen bereits mit der Bearbeitung des **Aufgabenblattes 9.1 a** klargeworden sein. Jedoch musste dort jede Zehnermenge einzeln ermittelt werden. Aus diesem hier vorliegenden **Aufgabenblatt 9.1 b** lässt sich deutlich die Verbindung zwischen Bündel, Ordnung, Einheit oder Muster erkennen. Wenn ein Zehner (Fünfer) umrundet ist, kann sofort der nächste Zehner (Fünfer) gesehen werden.

Hinzu kommt, dass die Teilnehmer*innen verstehen sollen, dass zwei Fünferbündel zu einem Zehnerbündel zusammengefasst werden. Das heißt im Umkehrschluss bei 75, es liegen immer doppelt so viele Fünferbündel (14) wie Zehnerbündel (7) vor. Hier bei 75 sogar noch ein Fünferbündel mehr, da die verbliebenen Einer zwar zu einem Fünfer, jedoch noch nicht zu einem Zehner gebündelt werden können.

AUFGABENBLATT 9.1 b

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, **Aufgabenblatt 9.1 b** *Bündelung (10er und 5er)* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) zu bearbeiten. Hier gilt es, die Anzahl der Stifte aus einer bereits geordneten Menge zu ermitteln.

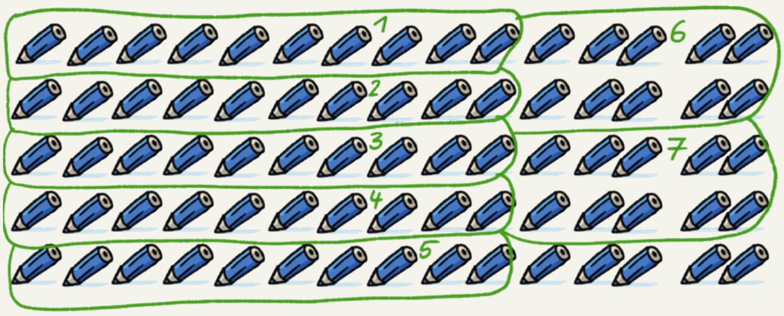
Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, zunächst zu ermitteln, wie viele Stifte jeweils in einer Reihe liegen. Es sind 15.

Ist es hilfreich für Sie, dass auf dem Aufgabenblatt fünf Reihen mit jeweils 15 Stiften sind? Die Stifte sind geordnet. Es sieht wie ein Muster aus. Es ist sicher leichter, hier die Zehnerbündelung durch Umkreisen mit einem Stift zu machen. Durch die Anordnung der Stifte sehen Sie sofort, wenn Sie einen Zehner umrandet haben, wo der nächste liegt. Das gilt auch bei den Fünfern.

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, zunächst die Bündelung in Zehnerpakete und danach im zweiten Teil des Aufgabenblattes in Fünferpakete vorzunehmen und entsprechend die Zahlen in die Tabellen einzutragen. Es ist jeweils die gleiche Menge von Stiften abgebildet.

Bündeln Sie die Stifte zu Zehnerpaketen (Fünferpaketen), indem Sie immer zehn (fünf) Stifte markieren. Schreiben Sie dann in der Tabelle auf, wie viele Zehnerpakete (Fünferpakete) Sie bekommen. Wie viele Stifte sind es? Tragen Sie die Anzahl ein. Tabellen einzutragen. Es ist jeweils die gleiche Menge von Stiften abgebildet.

Man kann Zehner auf unterschiedliche Weisen umrunden. Bei geordneten Mengen ist es einfacher als bei ungeordneten. Wenn man einen Zehner gefunden hat, kann man sehr schnell weitere Zehner erkennen. Die geordnete Struktur macht das möglich.



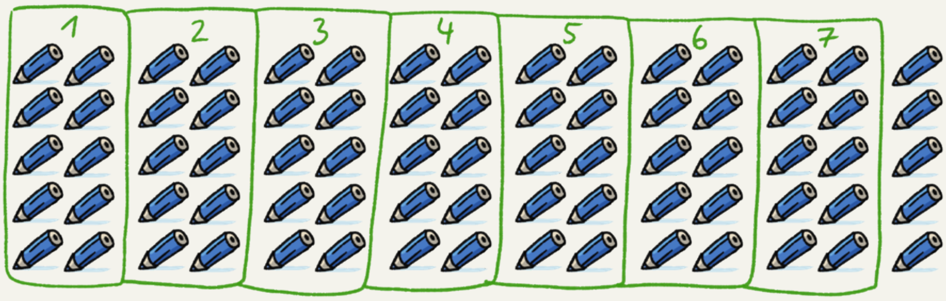
Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Anzahl	75

Abbildung 9.1-5 Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1 b – Variante 1

Zum Beispiel ist es leicht, zehn Einer, die in einer Reihe sind, zu erkennen. So kann man zunächst fünf Zehner umrunden. Die restlichen Stifte bündelt man zu jeweils fünf und fünf. Man findet insgesamt sieben Zehner und fünf Einer. Das entspricht der Anzahl 75. Die Zehner schreibt man links, die Einer rechts.

Die Kursleitung spricht an dieser Stelle bewusst von Zehnern und Einern – nicht mehr von Zehnerpaketen, Zehnerbündeln, ungebündelten Einern usw., denn Zehner und Einer sind bereits eingeführte Begriffe.



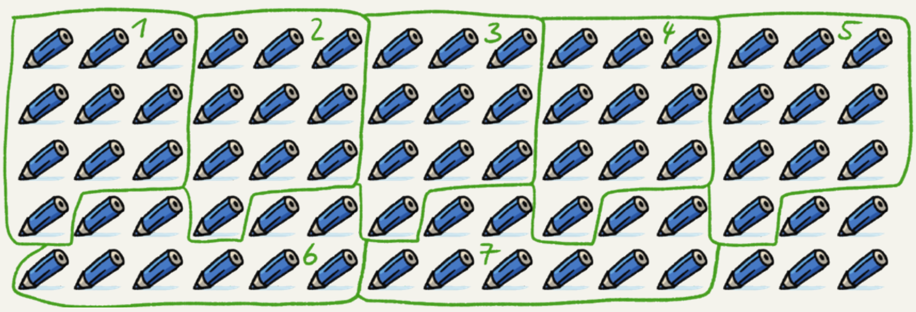
Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Anzahl	75

$10 \cdot 7 = 70$
$+$
$5 \cdot 1 = 5$

Abbildung 9.1-6 Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1 b – Variante 2

In der Abbildung sieht man eine weitere Möglichkeit, wie man Zehner bündelt. Jeweils zweimal fünf Einer sind ein Zehner. Insgesamt sind es auch hier sieben Zehner und fünf Einer.

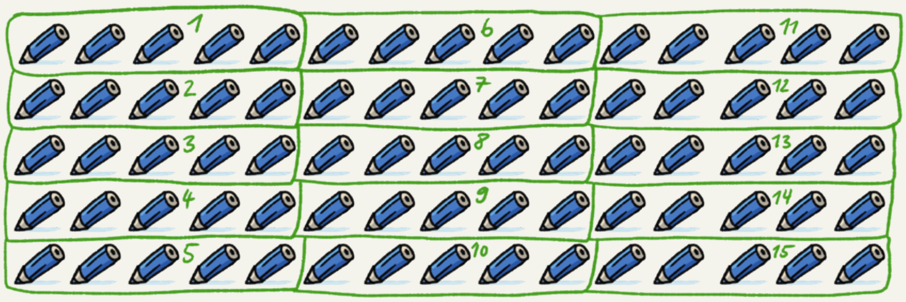


Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Anzahl	75

Abbildung 9.1-7 Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1 b – Variante 3

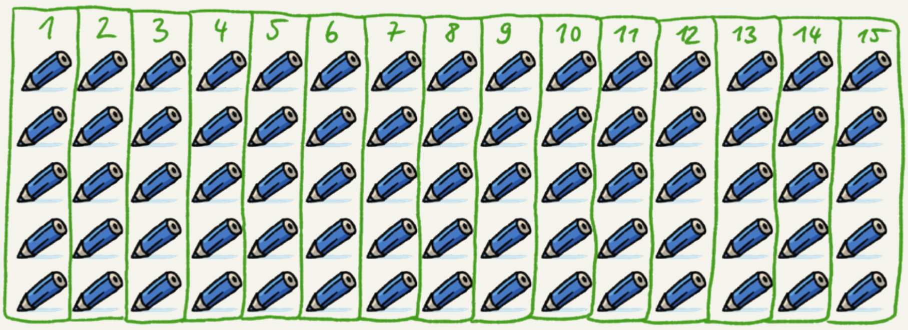
Auch wenn man drei, drei, drei und einen Einer zu einem Zehner zusammenfasst, kann man ein Muster erkennen. Man findet wieder sieben Zehner und fünf Einer. Die Lösungen für den zweiten Teil des Aufgabenblattes sind ähnlich. Da es im oberen und im unteren Teil des Aufgabenblattes die gleichen Mengen sind, muss man doppelt so viele Fünfer finden. Denn in jedem Zehner sind zwei Fünfer enthalten. Die nächste Abbildung zeigt drei verschiedene Möglichkeiten, Fünfer zu bündeln.



Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	/

Anzahl	75

Abbildung 9.1-8 Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1 b – Variante 1

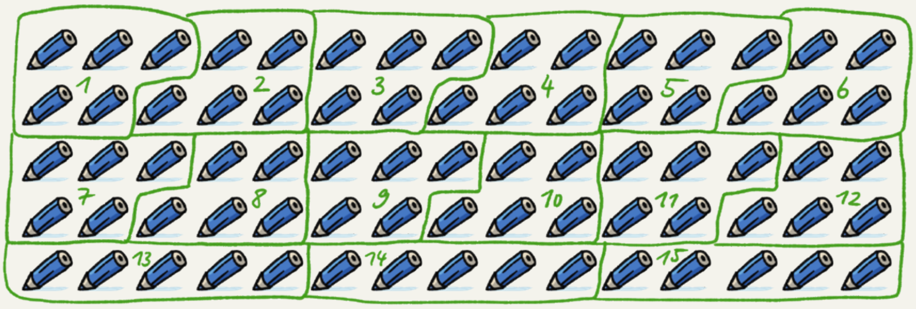


Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	/

Anzahl	75

$15 \cdot 5 = 75$

Abbildung 9.1-9 Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1 b – Variante 2



Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	*/*

Anzahl	*75*

Abbildung 9.1-10 Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1 b – Variante 3

Es wurden bei allen Versionen immer 15 Fünfer ermittelt.

- Daraus die Anzahl zu bestimmen, ist rechnerisch möglich über $15 \cdot 5 = 75$, das dürfte aber noch nicht von allen Teilnehmer*innen erkannt werden.
- Die Anzahl kann in Fünfer-Schritten zählend ermittelt werden: 5, 10, 15, 20, 25, …, 75.
- Zwei Fünfer können jeweils zu einem Zehner zusammengefasst werden. Somit werden sieben Zehner ermittelt und fünf Einer bleiben ungebündelt: 75.
- Werden zwei Fünfer zu einem Zehner zusammengefasst, wurde zwar formal eine Fünferbündelung vorgenommen, aber die Fünfer wurden im zweiten Schritt zu einem Zehner zusammengeführt.

Bei der Bestimmung der Anzahl großer Mengen ist die Bündelung von Fünfern im ersten Schritt möglicherweise einfacher. Danach werden jeweils zwei Fünfer zu einem Zehner zusammengefasst. Ob diese Methode oder die Methode, sofort Zehner zu bündeln, effektiver ist, sollte jede*r für sich entscheiden.

EXKURS

Die Kursleitung fragt nach anderen Vorschlägen, die Anzahl der Stifte auf dem **Aufgabenblatt 9.1 b** zu bestimmen.

Zum Beispiel dieser: Da bereits ermittelt wurde, dass in einer Reihe 15 Stifte angeordnet sind und es fünf Reihen davon gibt, könnte addiert oder multipliziert werden.
$15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75$ oder
$5 \cdot 15 = 75$. Wenn Teilnehmer*innen bereits über dieses Wissen verfügen, gilt es, individuell festzustellen, mit welchen Lerninhalten diese Teilnehmer*innen gefördert werden müssen. Sehr wahrscheinlich liegen keine besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen im Zahlbereich bis 100 vor.

9.1.5 Vortrag Kursleitung – Bündelung

Didaktisches Ziel
Bündelungsgedanke und Zehner-Einer-Stellentafel wiederholen und festigen

EXPLORATION

Sie haben gelernt, wie Sie jeweils zehn Elemente bündeln. Sie wissen, aus wie vielen Elementen eine größere Menge besteht – unwichtig, ob die Menge geordnet oder ungeordnet ist. Bündeln ist eine einfache Art und Weise, um große Anzahlen zuerst übersichtlich anzuordnen und dann aufzuschreiben. Die Anzahl der Zehner schreibt man links/vorne, die Anzahl der restlichen Einer rechts/hinten. Es ist eine gesellschaftliche Abmachung, dass man die Zehner vor den Einern schreibt. Die Bündel schreiben Sie in einer Zehner-Einer-Tabelle auf. Wie wir die Zahlen sprechen, haben wir vorerst noch nicht behandelt.

Zehner	Einer

Diese Zehner/Einer-Tabelle verwenden wir in der nächsten Unterrichtssequenz wieder, wenn wir uns mit dem Stellenwertsystem beschäftigen.

Wenn Sie dieses Wissen auf die Zahlenebene übertragen, bedeutet das, in Einern und Zehnern zu denken. In Zehnern sind zehn Einer zusammengefasst. Damit wird eine neue Denk-Einheit geschaffen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Auf der Mengenebene wurden verschieden große Einheiten gebündelt oder – anders ausgedrückt – zusammengefasst.
- Die Begriffe *Einheiten* oder *Bündel* können synonym verwendet werden.
- Besonders in geordneten Mengen sind Bündelungsmuster leicht zu erkennen.
- Das System, auf das bei Bündelungen zurückgegriffen wird, besteht darin, immer wieder eine bestimmte, gleich große Anzahl von Elementen zusammenzufassen. So oft es möglich ist: fünf Elemente zu einem Fünfer, zehn Elemente zu einem Zehner usw.
- Die Anzahl einer größeren Menge lässt sich bestimmen, indem das Zehner-Bündelungsprinzip angewandt wird.
- Es wurden erste Hinweise zum Stellenwertsystem gegeben: Zehner werden links notiert und Einer (ungebündelt) rechts. In Zehnern sind zehn Einer zusammengefasst.

9.2 Zehnerbündel im Stellenwertsystem

EXPLORATION

Es wird das Stellenwertsystem eingeführt. Dafür ist zunächst eine Stellenwerttabelle hilfreich. Die Grundregel der Nutzung der Stellenwerttabelle lautet: Wenn es auf einer Stelle zehn oder mehr sind, wird eine neue Stelle besetzt bzw. der linke Stellenwert wird um eins oder mehr erhöht. Sind auf einer Stelle zum Beispiel zwanzig eingetragen, wird die linke Stelle um zwei erhöht usw. Ausgehend von Mengenbetrachtungen soll verallgemeinert und verstanden werden, wie das dekadische Zahlsystem aufgebaut ist.

Vorab haben die Teilnehmer*innen einzelne Elemente zu Zehnerbündeln zusammengefasst. Ziel der vorangegangenen Kapitel im Zahlbereich bis 10 war, Zahlen kardinal zu verstehen. Hier gilt es nun, dieses Wissen auf größere Zahlen zu übertragen. Den Teilnehmer*innen soll es gelingen, Einer, Zehner, Hunderter usw. als Zahlen zu denken, aus denen weitere Zahlen aufgebaut sind. Die Stellenwerttabelle ist dabei ein Hilfsmittel. Aus der Position in der Stellenwerttabelle kann darauf geschlossen werden, ob es sich um Einer, Zehner oder Hunderter handelt. Die Zahl des jeweiligen Stellenwertes gibt an, wie viele Einer, Zehner oder Hunderter vorhanden sind.

Die Prinzipien der Notation sind: Immer wenn es zehn sind, wird eine neue Stelle gebildet oder es kann in eine neue Stelle umgewandelt werden.

Rechts werden Einer notiert, links davon Zehner und links von den Zehnern Hunderter. Ist eine Stelle nicht besetzt, wird dafür eine Null notiert. Dieses Prinzip kann auf das gesamte dekadische Zahlsystem übertragen werden. Aus der Notation 147 lässt sich folglich ableiten, dass es sich um einen Hunderter, vier Zehner und sieben Einer handelt (vgl. RC Rechnen, Stufe 2, S. 51 ff.).

9.2.1 Spiel – Bündelung von Einern zu Zehnern und Hundertern

Didaktisches Ziel
Wiederholung/Vertiefung der in Kapitel 9.1 gewonnenen Einsichten in das Bündelungsprinzip: Reflektierte Mengenhandlungen mit Bündelungen von 10 Einern zu einem Zehner und von 10 Zehnern zu einem Hunderter

EXPLORATION

Im nachfolgenden Spiel verdeutlichen sich die Teilnehmer*innen – indem sie es selbst tun – wie Schritt für Schritt ein Zehner nach dem anderen aus zehn Einern gebündelt wird, bis es schließlich zehn Zehner sind, die zu einem Hunderter gebündelt werden.

Diese Aufgabe dient dazu, das Wissen darüber zu vertiefen, welche Mengenhandlungen mit den Bündelungen zum Zehner und zum Hunderter verbunden sind.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 9.2 a

Die Teilnehmer*innen finden sich in Zweiergruppen zusammen, um ein Spiel zu spielen. Jede Gruppe benötigt dafür einen Zehnerwürfel, zwei **Aufgabenblätter 9.2 a** *Stellenwerte* (Bearbeitungsdauer ca. 15 Minuten), 20 einzelne Holzwürfel sowie 20 Zehnerstangen und zwei Hunderterplatten. Ebenso geeignet ist strukturiertes Material mit Einern, Zehnern, Hundertern – zum Beispiel 20 Ein-Euro-Stücke, 20 Zehn-Euro-Scheine, zwei Hundert-Euro-Scheine.

Die Kursleitung erläutert die Spielregeln.

Sie würfeln abwechselnd. Vor Ihnen liegt das Aufgabenblatt 9.2 a, *das geordnete Material und ein Zehnerwürfel. Die*Der Jüngste beginnt.*

*Sie würfeln eine Zahl mit dem Zehnerwürfel, z. B. eine Acht. Dafür nehmen Sie die entsprechende Anzahl (acht) Holzwürfel. Legen Sie diese in das Einerfeld. Danach würfelt die*der andere. Beim nächsten Mal würfeln Sie zum Beispiel eine Vier. Sie legen dafür vier Holzwürfel ab. Jetzt liegen zwölf Einer in Ihrem Einerfeld. Immer, wenn man zehn Einer erreicht, tauschen Sie diese gegen eine Zehnerstange. Legen Sie die Zehnerstange in das Zehnerfeld. Jetzt liegen ein Zehner in Ihrem Zehnerfeld und zwei Einer in Ihrem Einerfeld. Machen Sie weiter, bis Sie zehn Zehner getauscht haben. Diese zehn Zehner tauschen Sie gegen eine Hunderterplatte ein. Sie legen den Hunderter in das Hunderterfeld. Gewonnen hat die Person, die zuerst einen Hunderter ablegen konnte.*

Die Kursleitung achtet während des Spiels darauf, dass die Teilnehmer*innen reflektieren und möglichst auch aussprechen können, dass sie einen Bündelungsprozess von zehn Einern zu einem Zehner (bzw. von zehn Zehnern zu einem Hunderter) vollziehen. Eine Erweiterung des Spiels ist folgende:

Man kann dieses Spiel auch umgekehrt spielen. Sie entnehmen die jeweils gewürfelte Zahl. Sie beginnen mit einem Hunderter. Sie würfeln zum Beispiel eine Drei. Zunächst müssen Sie den Hunderter entbündeln. Sie tauschen den Hunderter in zehn Zehner um. Im zweiten Schritt müssen Sie einen Zehner entbündeln. Sie tauschen einen Zehner in zehn Einer um. Sie legen die Zehner und Einer in die jeweiligen Felder. Jetzt können Sie die (drei) Einer entnehmen. Vor Ihnen liegen jetzt neun Zehner und sieben Einer. Sie haben drei Einer entnommen. Wiederholen Sie diese Schritte, bis keine Holzwürfel mehr übrig sind. Gewonnen hat die Person, die zuerst keine Holzwürfel mehr auf dem Spielfeld liegen hat.

9.2.2 Kursgespräch – Einführung des Stellenwertsystems

Didaktische Ziele
- Bündelungen mit Ziffern in die Stellenwerttafel eintragen (zur Verdeutlichung, dass jede Position im Stellenraster einen Wert repräsentiert; wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird eine Null geschrieben)
- Stellenwertsystem als Begriff kennenlernen

EXPLORATION

Die Kursleitung wertet mit den Teilnehmer*innen das Würfelspiel aus der vorangegangenen Unterrichtssequenz mithilfe der nachfolgenden Beispielabbildungen aus.

Nachdem die Teilnehmer*innen mit Holzwürfeln insgesamt 100 Einer zunächst schrittweise zu Zehnern und danach zehn Zehner zu einem Hunderter gebündelt haben, werden diese Handlungen visualisiert. Mithilfe der Visualisierung wird die Systematik des *Stellenwertsystems* erläutert. Das Stellenwertsystem wird als Begriff eingeführt. Die Teilnehmer*innen verstehen: Wenn zehn Einer vorliegen, wird der neue Stellenwert des Zehners besetzt (links vom Stellenwert des Einers). Ebenso: Wenn zehn Zehner vorhanden sind, wird der nächste *Stellenwert des Hunderters* besetzt (links vom Stellenwert des Zehners).

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

In dem Würfelspiel haben Sie mit dem Zehnerwürfel zum Beispiel eine Acht gewürfelt. Dafür haben Sie acht Einer in das Einerfeld gelegt. Man sieht den entsprechenden Spielplan (siehe Aufgabenblatt 9.2 a*) in der nachfolgenden Abbildung.*

Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		8

Abbildung 9.2-1 Mit dem Zehnerwürfel würfeln, dafür Einer ablegen – 8 Einer

Sie kennen die Begriffe Zehner und Einer. Wenn man zehn Zehner bündelt, erhält man einen Hunderter. Einer, Zehner, Hunderter stehen auch für Stellenwerte. Die Zahlen bis zur Neun sind einstellig. Sie füllen eine Stelle aus. Wenn man zehn Einer bündelt, erhält man einen Zehner. Die Zehn ist der erste Zehner. Man füllt die zweite Stelle aus.

Die gesellschaftliche Regel ist: Rechts stehen die Einer. Hat man zehn Einer, kommt links davon eine zweite Stelle dazu. Hat man insgesamt zehn Zehner, kommt links davon eine weitere dritte Stelle dazu. In der nächsten Runde würfelt man im Spiel zum Beispiel eine Vier und es kommen vier Einer dazu.

Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		12

Abbildung 9.2-2 Vier Einer kommen dazu – 12 Einer

Jetzt sind es insgesamt zwölf Einer.
Davon tauscht man zehn Einer in einen Zehner.

EXKURS

An dieser Stelle könnte die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen diskutieren und dabei ausprobieren, wie aus einer unstrukturierten Menge von Holzwürfeln zehn Holzwürfel als Struktureinheit erkannt (gesehen) werden können. Zum Beispiel: Zweimal fünf Holzwürfel oder fünfmal zwei Holzwürfel oder dreimal drei und ein Holzwürfel.

Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		
	1	2

Abbildung 9.2-3 Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt und getauscht – 1 Zehner, 2 Einer

Also sind es ein Zehner und zwei Einer. Man schreibt für die Zehnerstelle eine Eins und für die Einerstelle eine Zwei. Die Zahl ist zweistellig. In die untere Zeile der Tabelle schreibt man 1 für den Zehner und 2 für den Einer.

Um sich das Stellenwertsystem zu verdeutlichen, geht es zunächst nicht um die korrekte Sprechweise der Zahl – hier Zwölf. Die Sprech- und Schreibweise wird in der nächsten Unterrichtssequenz analysiert. Sondern es geht darum, sich zu verdeutlichen, dass zuerst der Zehner aufgeschrieben wird – eins – und danach der Einer – zwei. Um die Stelle zu verdeutlichen, spricht die Kursleitung: zuerst ein Zehner und dann zwei Einer.

Wenn Sie jetzt eine Neun würfeln, sind es 11 Einer und 1 Zehner.

Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		
	1	11

Abbildung 9.2-4 Neun Einer kommen dazu – 1 Zehner, 11 Einer

Sie können wieder zehn Einer zu einem Zehner bündeln, also die Holzwürfel in eine Zehnerstange tauschen.

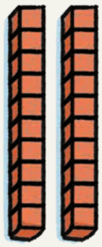
Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		
	2	1

Abbildung 9.2-5 Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt – 2 Zehner, 1 Einer

Es kommt also ein Zehner dazu. Es sind jetzt zwei Zehner und ein Einer.
Man schreibt 21 – zwei Zehner, ein Einer.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen, welche Zahlen bei zwei Zehnern und einem Einer gewürfelt werden müssten, damit wieder ein neuer Zehner gebündelt werden kann. Mögliche richtige Antworten wären:

- Eine Zehn. Dann wären es drei Zehner und ein Einer. Hier kann sofort eine Zehnerstange genommen werden.
- Eine Neun. Dann wären es drei Zehner und kein Einer.
- Eine Fünf und eine Sieben. Dann wären es zunächst sechs Einer, dann 13 Einer, davon zehn zu einem Zehner getauscht, sind es jetzt drei Zehner und drei Einer.
- Eine Acht und eine Sechs. Dann wären es insgesamt 15 Einer. Davon werden zehn zu einem Zehner getauscht, jetzt sind es drei Zehner und fünf Einer.
- Usw.

Die Kursleitung führt dieses Gedankenexperiment fort.

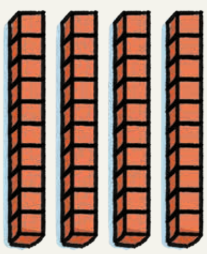
Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		
	4	6

Abbildung 9.2-6 4 Zehner und 6 Einer

In der Abbildung sind vier Zehner und sechs Einer. Was passiert, wenn fünf Einer dazukommen?

Die richtige Antwort lautet: Es werden fünf Zehner und ein Einer.

Die Fragen und die Zahlen können variiert werden.

Zum Beispiel haben wir sieben Zehner und acht Einer. Wie viele fehlen, bis man wieder einen neuen Zehner bündeln kann?

Zwei Einer – man schreibt 80. Die Einerstelle ist nicht mehr besetzt, deswegen schreibt man eine Null.

Wir haben drei Zehner und fünf Einer. Was passiert, wenn neun Einer dazukommen?

Damit sind es 14 Einer, daraus kann man einen Zehner bündeln und es bleiben vier Einer übrig. Jetzt sind es also insgesamt vier Zehner und vier Einer – man schreibt 44.

Die Kursleitung beschreibt:

Wenn es zehn Zehner sind, kann man diese in einen Hunderter tauschen. Denn ein Hunderter enthält zehn Zehner. Zusätzlich zur Abbildung möchte ich Ihnen am Holzmaterial zeigen, dass man zehn Zehnerstangen zu einer Hunderterplatte bündeln kann. An den Vertiefungen an der Hunderterplatte kann man die Zehnerstangen noch erkennen. Schreibt man die Anzahl auf, besetzt der Hunderter eine neue Stelle links vor der Zehnerstelle.

Die Tabelle sieht bei zehn Zehnern und drei Einern so aus:

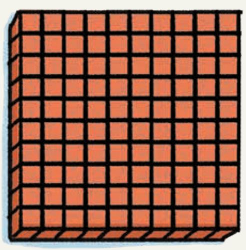
Stellenwerte		
Hunderter	**Zehner**	**Einer**
		
1	0	3

Abbildung 9.2-7 Zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt – 1 Hunderter, 3 Einer

Das heißt, wenn man zehn Zehner zu einem Hunderter bündelt, schreibt man eine dritte Stelle vor die beiden anderen. Geschrieben 1, 0, 3 – eins null drei. Es sind jetzt ein Hunderter (1), kein Zehner (0) und drei Einer (3). Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, schreibt man dafür eine Null.

Wir haben jetzt gesehen, dass man im Stellenwertsystem Werte für Einer, Zehner und Hunderter schreiben kann. Die jeweiligen Zahlen auf den Stellen stehen für bestimmte Werte. Wenn zum Beispiel auf der Zehnerstelle eine Drei steht, steht das für drei Zehner. Sobald eine Stelle den Wert Zehn erreicht, bildet man eine neue Stelle und schreibt sie links davor. Das Wort Stellenwertsystem beschreibt, dass man die Stellen mit Zahlen besetzt. Man kann umgekehrt daraus ablesen, wie viele der jeweiligen Stellen es gibt.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben.
- Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt – das ist die Zehnerstelle. Die Zahl ist jetzt zweistellig.
- Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – das ist die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig.
- Das Stellenwertsystem ist auf diese Weise beliebig erweiterbar.
- Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.

Die Kursleitung zeigt mit folgendem Bild, wie das *Stellenwertsystem* aufgebaut ist. Es ist beliebig erweiterbar. In die Tabelle, auch als *Stellenwerttabelle* bezeichnet, werden Zahlen eingetragen. Wie viele Einer, Zehner, Hunderter es jeweils sind, kann direkt aus den Tabellenspalten abgelesen werden. Üblicherweise werden Einer mit E abgekürzt. Für Zehner wird Z geschrieben und für Hunderter H. Der jeweilige Wert der Stelle, also die Anzahl der jeweiligen Bündelungen, kann so ermittelt werden.

Billionen			Milliarden			Millionen			Tausend					
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
														9
													4	3
												1	5	0
				Der Stellenwert wird umgewandelt.								10		
											1	0	0	0
				Der Stellenwert wird umgewandelt.									27	
												2	7	0

Die Kursleitung erläutert anhand der Abbildung die Stellenwerttabelle.

Jetzt möchte ich Ihnen den Aufbau des Stellenwertsystems durch Beispiele in der Abbildung erklären: Man beginnt rechts und trägt die Stellenwerte ein. Als erstes die Einer – im Beispiel in der ersten Zeile: neun Einer. In der zweiten Zeile der Stellenwerttabelle sehen Sie eine Zahl, die aus drei Einern und vier Zehnern besteht. Rechts stehen die Einer und links die Zehner.

In der dritten Zeile hat die Zahl keinen ungebündelten Einer. Deswegen schreibt man eine Null. Es sind fünf Zehner und ein Hunderter. Wenn man die Zahl wieder entbündelt, besteht sie insgesamt aus 150 Einern.

In der vierten Zeile stehen zehn Hunderter. Man wandelt den Stellenwert um. Denn bei zehn besetzt man den nächsten Stellenwert links – so wie in der fünften Zeile. Zehn Hunderter ergeben einen Eintausender. Die anderen Stellen sind nicht besetzt, deswegen schreibt man Nullen, also 1000.

In der sechsten Zeile stehen 27 Zehner. Auch hier wandelt man den Stellenwert um: 20 Zehner wandelt man in zwei Hunderter um, 7 Zehner bleiben stehen und für die Einerstelle schreibt man eine Null.

AUSBLICK

Die Stellenwerttabelle kann man beliebig nach links fortsetzen. In der Stellenwerttabelle stehen bekannte Begriffe wie Tausend, Millionen, Milliarden, Billionen. Diese Stellenwerttabelle brauchen wir später wieder im Unterricht, wenn wir uns mit großen Zahlen beschäftigen. Das System mit Einern/Zehnern/Hundertern wiederholt sich auch in den Zahlnamen: Eintausend (Tausend gesprochen), Zehntausend, Hunderttausend. Eine Million (Million gesprochen), Zehnmillionen, Hundertmillionen. Usw.

Wozu braucht man die Stellenwerttabelle? Die Stellenwerttabelle ist hilfreich, wenn man mit Stellenwerten und Umwandlungen arbeitet.

Das Stellenwertsystem ist die Basis unseres Dezimalsystems. Zur Verdeutlichung, zum Kennenlernen und zum Verstehen braucht man die Stellenwerttabelle. Ziel ist es, Zahlen ohne Stellenwerttabelle zu schreiben, zu sprechen und deren Wert zu bestimmen. Die Zahlennamen spielten in dieser Unterrichtssequenz zunächst keine Rolle. Es geht darum zu verstehen, wie die Zahlen aufgebaut sind. Immer wenn es zehn sind, besetzt man eine neue Stelle links von der Stelle. Aus zehn Einern wird ein Zehner. Man besetzt die Zehnerstelle und schreibt dafür eine Eins. Es gibt keine ungebündelten Einer mehr. Deswegen schreibt man auf der Einerstelle eine Null. Wenn es zehn Zehner sind, besetzt man die Hunderterstelle. Ist die Zehnerstelle bereits besetzt und kommen zehn weitere Einer dazu, erhöht man die Zehnerstelle um eins.

Im Umkehrschluss heißt das, dass man in einem Zehner zehn Einer bündelt. Auch wenn auf der Stelle der Einer eine Null steht, also kein Einer (eigentlich: kein ungebündelter bzw. freier oder loser Einer), kann man den Zehner wieder in zehn Einer entbündeln.

Die Kursleitung nimmt eine Zehnerstange und zeigt, dass darin zehn Einer enthalten sind.

Ein Hunderter enthält zehn Zehner. Daraus folgt, dass ein Hunderter hundert Einer enthalten muss.

Die Kursleitung nimmt eine Hunderterplatte und zeigt, dass darin zehn Zehnerstangen und gleichzeitig auch hundert einzelne Würfel enthalten sind.

9.2.3 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Stellenwerte eintragen

Didaktisches Ziel
Festigen/Vertiefen der bisher erworbenen Erkenntnisse beim Eintragen von Einern, Zehnern und Hundertern in die Stellenwerttabelle (Wann braucht es eine Null als Platzhalter? Wann und wie muss gebündelt werden, weil mehr als zehn von einer Einheit vorhanden sind?)

EXPLORATION

AUFGABENBLATT 9.2 b

Die Kursleitung bearbeitet gemeinsam mit den Teilnehmer*innen das **Aufgabenblatt 9.2 b** *Stellenwerttabelle (Bearbeitungsdauer ca. 15 Minuten)*.

Die Kursleitung erläutert die Aufgabe.

> *Tragen Sie die Hunderter (H), Zehner (Z) und Einer (E) in die Stellenwerttabelle ein. Achten Sie darauf, wenn es auf einer Stelle zehn sind, dass Sie eine neue Stelle links daneben besetzen.*

Die Kursleitung bespricht jede Aufgabe mit den Teilnehmer*innen. Sie achtet darauf, dass alle Teilnehmer*innen zu Wort kommen, um Verständnisschwierigkeiten bei Einzelnen zu erkennen.

Aufgaben		Stellenwerte			Mögliche Antworten
		H	Z	E	
1.	3 Z und 14 E		4	4	Aus 14 Einern kann ein Zehner gebildet werden. Dieser wird zu den drei Zehnern dazugerechnet. Es werden vier Zehner und vier Einer eingetragen. Es sind vier Zehner und vier Einer.
2.	7 E und 4 Z		4	7	Die sieben Einer werden auf der Einerstelle eingetragen und die vier Zehner auf der Zehnerstelle.
3.	14 Z und 6 E	1	4	6	Die Stelle des Hunderters muss mit eins besetzt werden. Es verbleiben vier Zehner und sechs Einer.
4.	23 E		2	3	Es sind zwei auf der Zehnerstelle und drei auf der Einerstelle zu notieren.
5.	5 E und 7 Z		7	5	Einer und Zehner in die richtige Stelle eintragen.
6.	12 E und 4 Z		5	2	Einer und Zehner in die richtige Stelle eintragen sowie die Stelle des Zehners um eins erhöhen. Fünf Zehner und zwei Einer.
7.	4 Z		4	0	Für die Einerstelle wird null notiert.
8.	20 Z und 1 E	2	0	1	Es sind zwei Hunderter zu notieren, für die Zehnerstelle null und ein Einer.

9.	1 H und 7 E	1	0	7	Es ist kein Zehner vorhanden, deswegen null notieren.
10.	2 H und 4 Z und 3 E	2	4	3	Direkt übertragen. Zwei Hunderter, vier Zehner und drei Einer.
11.	56 E		5	6	Es sind fünf auf der Zehnerstelle und sechs Einer zu notieren.
12.	20 Z und 20 E	2	2	0	Es sind zwei Hunderter und zwei Zehner. Für die Einerstelle null notieren.
13.	9 Z und 16 E	1	0	6	Die Zehnerstelle um eins erhöhen, damit sind es zehn, deswegen wird die Hunderterstelle besetzt und für die Zehnerstelle wird null notiert.
14.	134 E	1	3	4	Aus 134 Einern können 13 Zehner gebildet werden. Zehn Zehner bilden einen Hunderter. Es sind also ein Hunderter, drei Zehner und vier Einer.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Das Dezimalsystem ist ein geordnetes System mit Stellenwerten. Die Ordnung basiert auf Bündelungen. Das Bündelungsprinzip lautet:
  - Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt.
  - Zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt.
- Mithilfe von Bündelungen kann auf der Mengenebene leichter die Anzahl von größeren Mengen bestimmt werden. Dieses Zusammenfassen zu Zehnern und Hundertern ist auf die Zahlenebene übertragbar: Auch auf der Zahlenebene werden Einer zu Zehnern oder Zehner zu Hundertern zusammengefasst.
- Die Bündel können geordnet in eine Stellenwerttabelle, die zunächst als Hilfsmittel dient, eingetragen werden. Ein Grundprinzip des Stellenwertsystems besteht darin, die Bündel geordnet zu notieren. Es gibt rechts beginnend Einer-, Zehner- und Hunderterstellen. Aus der Belegung des Stellenwertes lässt sich ableiten, um wie viele Einer, Zehner oder/und Hunderter es sich handelt. Sind es zehn, dann wird die Stelle links daneben mit eins besetzt bzw. um eins erhöht. Gibt es keine Einer, Zehner oder Hunderter, dann wird auf der jeweiligen Stelle eine Null notiert.
- Einer sind einstellig, Zehner zweistellig und Hunderter dreistellig. Dieses Prinzip des Stellenwertsystems ist beliebig erweiterbar. Dabei ist die Zahl Zehn maßgeblich. Immer wenn es zehn sind, entsteht eine neue Stelle.

9.3 Zahlen hören, sprechen und schreiben

EXPLORATION

Der Schreib- und Sprechweise von Zahlen ist nicht unbedingt direkt anzusehen bzw. anzuhören, wie die Zahl sich zusammensetzt. Es wird zwar dreizehn, vierzehn usw. gesagt, aber nicht einszehn und zweizehn, sondern elf und zwölf. Dem Wort zwanzig hört man nicht an, dass hier zwei Zehner vorliegen. Bei der Zahl einhundertdreiundzwanzig werden zuerst der Hunderter, dann die Einer und dann die Zehner benannt. Wird die Zahl notiert, werden hingegen zuerst der Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer notiert. Viele Teilnehmer*innen sind sicherlich auch wegen dieser sprachlichen Inkonsistenzen in ihrem Rechnenlernen gescheitert. Über die Analyse, wie Zahlen geschrieben und gesprochen werden, wird der Zusammenhang des Zahlaufbaus zur Stellenwerttabelle bewusst. Faszinierend ist, dass das Zahlsystem mit nur zehn Ziffern auskommt (vgl. RC Rechnen, Stufe 2, S. 55 ff.).

9.3.1 Vortrag – Zehn Ziffern

Didaktische Ziele

- Zweistellige Zahlen richtig lesen – unter Beachtung der Besonderheit der deutschen Zahlensprechweise und der Unregelmäßigkeiten in der Zahlwortbildung
- Unterscheidung der Begriffe *Zahl* und *Ziffer*

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Bereits in den früheren Kapiteln haben wir mehrstellige Zahlen benannt und aufgeschrieben. Zum Beispiel haben Sie gelernt, dass man an einer Stelle im Stellenwertsystem höchstens neun aufschreibt. Bei zehn ergänzt man links von der Stelle eine neue Stelle oder es erhöht sich die linke Stelle um eins. Dann schreibt man auf der betrachteten Stelle eine Null.

Die Zehn ist zweistellig und dafür schreibt man zwei Zeichen (auch als Symbole bezeichnet)– nämlich 1 und 0. So schreibt man auch jede weitere zweistellige Zahl mit jeweils zwei Zeichen. Genauso schreibt man dreistellige Zahlen mit jeweils drei Zeichen. Zeichen ist ein wichtiges Stichwort.

Im Zusammenhang mit Zahlen sind Ihnen diese Zeichen bekannt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aus diesen zehn Zeichen besteht unser gesamtes Zahlsystem. Wenn wir die Zahl als Zeichen meinen, sprechen wir von Ziffern.

Zahlen als Ziffern

0 1 2 3
4 5 6
7 8 9

... es sind Zeichen

Diese zehn Zeichen reichen aus, um alle Zahlen zu schreiben. Durch das geordnete Aufschreiben der zehn Ziffern entwickelte sich eine faszinierende Symbolik für Zahlen. Die folgende Tabelle stellt das für einstellige Zahlen dar.

Einstellige Zahlen		
Zahl	**Bedeutung**	**Sprechweise**
0	0 E	Null
1	1 E	Eins
2	2 E: 1 + 1	Zwei
3	3 E: 1 + 1 + 1	Drei
4	4 E: 1 + 1 + 1 + 1	Vier
5	5 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Fünf
6	6 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Sechs
7	7 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Sieben
8	8 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Acht
9	9 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Neun

Abbildung 9.3-1 Einstellige Zahlen

Die Kursleitung wiederholt (siehe Spalte Bedeutung), dass in einstelligen Zahlen nur Einer enthalten sind und dass die Einer wiederum zu Zahlen zusammengefügt werden können. Das heißt zum Beispiel, dass die Acht aus acht Einern besteht. Demzufolge sind in der Acht auch die Drei und die Fünf enthalten, da drei Einer die Drei bilden und fünf Einer die Fünf. Wiederholend könnten an dieser Stelle die Zahlzerlegungen bis zur Neun an der Tafel besprochen werden.

In der ersten Spalte der Tabelle stehen die Zahlen von null bis neun mit den Ziffern 0 bis 9. Werden jetzt die Zahlen zweistellig, benötigen wir auch jeweils zwei Ziffern, um die Zahlen aufzuschreiben. Tatsächlich enstehen alle größeren Zahlen durch geordnetes Aufschreiben der zehn Ziffern: zweistellige Zahlen aus zwei Ziffern, dreistellige Zahlen aus drei Ziffern usw.

Jetzt möchte ich Ihnen zeigen, wie man zweistellige Zahlen schreibt, wie man sie sprechen müsste und wie man sie tatsächlich spricht.

Dabei bezeichnet zig den Zehner.

Zweistellige Zahlen				
Zahl	**Bedeutung**	**Mögliche Sprechweisen[1]**		**Tatsächliche Sprechweise**
10	1 Z und 0 E	eins-zig	Einszehn	**zehn**
20	2 Z und 0 E	zwei-zig	Zweizehn	**zwan-zig**
30	3 Z und 0 E	drei-zig	Dreizehn	**drei-ßig**
40	4 Z und 0 E	vier-zig	Vierzehn	vier-zig
50	5 Z und 0 E	fünf-zig	Fünfzehn	fünf-zig
60	6 Z und 0 E	sechs-zig	Sechszehn	**sech-zig**
70	7 Z und 0 E	sieben-zig	Siebenzehn	**sieb-zig**
80	8 Z und 0 E	acht-zig	Achtzehn	acht-zig
90	9 Z und 0 E	neun-zig	Neunzehn	neun-zig

Abbildung 9.3-2 Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 1

In der Tabelle sieht man, dass fünf Zehnerzahlen von der Regelsprechweise abweichen (markiert).

Die Kursleitung liest, wie in der Tabelle notiert, jeweils die einzelnen Zeilen vor. Zum Beispiel so:

Die Zahl 30 schreibt man mit den Ziffern 3 und 0. Durch die Stellenwerten wissen Sie: Es sind drei Zehner und kein Einer. Deswegen schreibt man 3 für die Zehnerstelle und 0 für die Einerstelle.

Wenn man für die Zehn zig spricht, müsste man die Zahl drei-zig (oder drei-zehn) aussprechen, denn die zig (oder zehn) ist dreimal vorhanden. Die tatsächliche Sprechweise (und Schreibweise des Zahlwortes) ist dreißig.

Sprechen:	Einer		Zehner
	sechs	und	vierzig
Schreiben:	Zehner		Einer
	4		6

Abbildung 9.3-3 Zahlen sprechen und schreiben – sechsundvierzig und 46

Während beim Schreiben der Zahl zuerst der Zehner (links) und danach der Einer (rechts) kommt, ist es beim Sprechen genau umgekehrt. Wir sprechen zuerst den Einer und danach den Zehner. Beide werden mit dem Wort „und" verbunden. Diese Tatsache führt manchmal zu Zahlendrehern. Das heißt, ich höre sieben und fünfzig und schreibe zuerst die Sieben und dann die Fünf, statt zuerst die Fünf und danach die Sieben: 57.

Die Kursleitung stellt weitere Beispiele an der Tafel vor. Dabei ist es wichtig, das Zahlwort betont zu sprechen, um damit den Teilnehmer*innen zu verdeutlichen, dass zuerst der Einer und danach der Zehner gesprochen wird. Im Gegensatz dazu wird, wenn die Zahl geschrieben wird, zuerst der Zehner und danach der Einer notiert. Das bedeutet, dass noch nicht geschrieben werden kann, wenn erst der Einer ausgesprochen ist.

Die Kursleitung achtet darauf, dass sie selbst stets die Zehner vor den Einern schreibt. Manche Teilnehmer*innen schreiben zuerst den Einer und danach den Zehner, weil sie die unterschiedliche Systematik der Sprech- und Schreibweise nicht analysiert haben.

- Sprechen – „acht und sechzig" vs. Schreiben – 68 „sechs acht"
- Sprechen – „drei und neunzig" vs. Schreiben – 93 „neun drei"

Um das Sprechen und damit das Zählen ab der Zehn inklusive der Unregelmäßigkeiten darzustellen, folgt eine weitere Tabelle. Auch hier sind denkbare Benennungsalternativen dargestellt.[2]

Zahl	Bedeutung	Mögliche Sprechweisen		Tatsächliche Sprechweise
10	1 Z und 0 E	eins-zig	zehn	zehn
11	1 Z und 1 E	eins-und-eins-zig	zehneins	elf
12	1 Z und 2 E	zwei-und-eins-zig	zehnzwei	zwölf
13	1 Z und 3 E	drei-und-eins-zig	zehndrei	dreizehn
14	1 Z und 4 E	vier-und-eins-zig	zehnvier	vierzehn
15	1 Z und 5 E	fünf-und-eins-zig	zehnfünf	fünfzehn
16	1 Z und 6 E	sechs-und-eins-zig	zehnsechs	sechzehn
17	1 Z und 7 E	sieben-und-eins-zig	zehnsieben	siebzehn
18	1 Z und 8 E	acht-und-eins-zig	zehnacht	achtzehn
19	1 Z und 9 E	neun-und-eins-zig	zehnneun	neunzehn
20	2 Z und 0 E	zwei-zig	zweizehn	zwanzig
21	2 Z und 1 E	eins-und-zwei-zig	zweizehneins	einundzwanzig (sprachliche Fortsetzung von oben wäre eigentlich einszwanzig)

22	2 Z und 2 E	zwei-und-zwei-zig	zweizehnzwei	**zweiundzwanzig** (zweizwanzig)
23	2 Z und 3 E	drei-und-zwei-zig	zweizehndrei	**dreiundzwanzig** (dreizwanzig)
24	2 Z und 4 E	vier-und-zwei-zig	zweizehnvier	**vierundzwanzig** (vierzwanzig)
25	2 Z und 5 E	fünf-und-zwei-zig	zweizehnfünf	**fünfundzwanzig** (fünfzwanzig)
26	2 Z und 6 E	sechs-und-zwei-zig	zweizehnsechs	**sechsundzwanzig** (sechszwanzig)
27	2 Z und 7 E	sieben-und-zwei-zig	zweizehnsieben	**siebenundzwanzig** (siebenzwanzig)
28	2 Z und 8 E	acht-und-zwei-zig	zweizehnacht	**achtundzwanzig** (achtzwanzig)
29	2 Z und 9 E	neun-und-zwei-zig	zweizehnneun	**neunundzwanzig** (neunzwanzig)
30	3 Z und 0 E	drei-zig	dreizehn	**dreißig**

Abbildung 9.3-4 Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 2

Bei den Zahlbenennungen treten viele Ausnahmen in der Sprechweise auf. Elf und zwölf sind keine zusammengesetzten Zahlwörter. Ab dreizehn spricht man den Einer zuerst und bindet ihn an die Zehn – dreizehn, vierzehn, … Wenn man so weiter macht, müsste es eigentlich „einszwanzig“, „zweizwanzig“, „dreizwanzig“, … heißen. Ab zwanzig setzt man jedoch das Wort „und“ ein, und die folgenden Zahlen heißen einundzwanzig, zweiundzwanzig, … sechsunddreißig … fünfundvierzig … achtundneunzig. Man benennt also zuerst den Einer, dann folgt „und“. Danach benennt man den Zehner.

Die Kursleitung liest einzelne Zeilen vor. Zunächst von 11 bis 19.

Zum Beispiel die Zahl 13: Die Dreizehn schreibt man mit den Ziffern 1 und 3. Erinnern Sie sich an die Stellenwerttabelle. Aus der Schreibweise 13 (eins drei) kann man ablesen: Es sind ein Zehner und drei Einer. Da man in der Sprechweise statt „zehn“ „zig“ verwendet, könnte es drei-und-einszig heißen. Wenn man die Schreibweise nach Stellenwerten 13 sprechen würde, könnte es zehn-drei heißen. Tatsächlich sagen wir aber dreizehn. Das heißt, man spricht den Einer vor dem Zehner.

Ab der Zwanzig gilt eine einheitliche Sprechweise: Man spricht den Einer zuerst. Danach spricht man mit dem Wort „und“ den Zehner. Nur bei dem Einer eins spricht man das „s“ nicht mit. Es heißt jetzt also ein-und-zwanzig, zwei-und-zwanzig, … Es heißt also nicht mehr wie zum Beispiel bei achtzehn jetzt achtzwanzig, sondern achtundzwanzig.

Schauen wir uns die Spalte „Bedeutung“ von oben nach unten an: Es ist von Zahl zu Zahl immer ein Einer mehr. Die Zahlen unterscheiden sich um eins. Sind in der 27 zwei Zehner und sieben Einer enthalten, sind es in der 28 ein Einer mehr, also zwei Zehner und acht Einer, bzw. in der 26 ein Einer weniger, also zwei Zehner und sechs Einer.

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen auf, weitere Zahlen korrekt und betont zu sprechen und dabei sowohl das Sprechprinzip als auch die Notation der Zahl zu beschreiben. Die Kursleitung notiert das Gesagte an der Tafel.

BEISPIEL
Für acht-und-dreißig wird 38 notiert.

Wichtig ist es, darauf zu achten, dass erst nach dem Aussprechen des gesamten Zahlwortes die Zahl notiert wird und zuerst der Zehner und danach der Einer notiert wird. Das heißt, erst feststellen (hören), um welchen Zehner es geht (hier dreißig), den Zehner (3) notieren und anschließend den Einer identifizieren (hier acht) und den Einer notieren (8).

Richtiges Zählen bis 100 ist möglich, wenn die Systematik verstanden wird. Die Unregelmäßigkeiten können den Teilnehmer*innen nicht erspart werden.

9.3.2 Aufgaben – Zahlendiktate

Didaktisches Ziel
Zweistellige Zahlen nach Diktat richtig schreiben, in der Reihenfolge zuerst Zehner, dann Einer

EXPLORATION

Mithilfe von Zahlendiktaten überprüft die Kursleitung, ob die Zahlen bis 100 von den Teilnehmer*innen richtig notiert werden und somit mit hoher Wahrscheinlichkeit auch richtig gezählt werden können.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Wenn Zahlen geschrieben werden, sollten zuerst die Zehner und danach die Einer geschrieben werden. Wird hier eine andere Vorgehensweise („inverse Zahlenschreibweise“) beobachtet oder zeigen sich Unsicherheiten oder Fehler, empfiehlt sich ein gezieltes Hörtraining. Gaidoschik[3] schlägt zur Vorbereitung eines Zahlendiktates nachfolgende Aufgaben zur Analyse gehörter Zahlen vor. Zweistellige Zahlen werden von der Kursleitung deutlich vorgesprochen und verschiedene Teilnehmer*innen sagen (nicht schreiben) abwechselnd:

- wie viele Einer sie heraushören,
- wie viele Zehner sie heraushören,
- zuerst die Einer und dann die Zehner (in dieser Reihenfolge),
- zuerst die Zehner und dann die Einer.

Die Kursleitung bittet anschließend die Teilnehmer*innen, folgende zügig hintereinander, laut und deutlich vorgetragenen Zahlen (besonders *und* betonen) zu notieren.

*Drei***und***vierzig*
*Zwei***und***siebzig*
*Sieben***und***zwanzig*
*Acht***und***achtzig*
*Vier***und***fünfzig*
*Ein***und***neunzig*
Siebzehn
*Fünf***und***dreißig*
*Neun***und***zwanzig*
*Zwei***und***neunzig*

Korrekte Notation:

43, 72, 27, 88, 54, 91, 17, 35, 29, 92

Wenn im Zahlendiktat bei einigen Teilnehmer*innen Fehler auftreten, sind gegebenenfalls weitere Erklärungen und Übungen zur Systematik des Zahlsystems bis 100 notwendig.

Eine vertiefende Übung ist das Eintippen zwei- oder dreistelliger Zahlen nach Diktat in einen Taschenrechner oder auch in eine Handytastatur. Dabei ist, anders als beim Notieren von Zahlen, die Zehnerziffer zwangsläufig zeitlich vor der Einerziffer einzutippen. Diese Übung liefert gleichzeitig ein Argument, warum es sinnvoll ist, die Zehner-Einer-Schreibrichtung nicht nur beim Tippen sondern analog dazu auch beim Notieren von Zahlen einzuhalten.

9.3.3 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Zahlenschreibweise

Didaktisches Ziel
Stellenanalyse von Zahlen (Zweistellige Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegen, Zahlen aus ihren Stellenwerten zusammensetzen und das entsprechende Zahlwort nennen)

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen überprüfen, ob sie Zahlwörter richtig schreiben sowie aus dem Zahlwort oder der symbolhaft dargestellten Zahl die Bedeutung erschließen. Mit *Bedeutung erschließen* ist gemeint zu erkennen, wie viele Zehner und Einer in der Zahl enthalten sind, und außerdem daraus zu schlussfolgern, wie viele Einer insgesamt enthalten sind. Das heißt, die Teilnehmer*innen können Stellenwerte interpretieren und die angegebenen Bündel in der richtigen Reihenfolge in Stellenwerte ordnen.

AUFGABENBLATT 9.3 a

Zum Abschluss des Unterkapitels bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen, das **Aufgabenblatt 9.3a** *Zahlenschreibweise* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) zu bearbeiten.

Es wird überprüft, ob es den Teilnehmer*innen gelingt, die Zahlen in der Reihenfolge „zuerst die Zehner und dann die Einer" zu schreiben.

Zahlenschreibweise		
Zahl	**Zahlwort**	**Bedeutung**
42	zweiundvierzig	4 Z und 2 E oder 42 E
37	*siebenunddreißig*	3 Z und 7 E *oder 37 E*
28	achtundzwanzig	*2 Z und 8 E oder 28 E*
64	*vierundsechzig*	*6 Z und 4 E oder 64 E*
91	*einundneunzig*	*9 Z und 1 E oder 91 E*
12	*zwölf*	*1 Z und 2 E oder* 12 E
79	neunundsiebzig	*7 Z und 9 E oder 79 E*
97	*siebenundneunzig*	*9 Z und 7 E oder 97 E*
85	*fünfundachtzig*	8 Z und 5 E *oder 85 E*
57	siebenundfünfzig	*5 Z und 7 E oder 57 E*
11	*elf*	*1 Z und 1 E oder 11 E*
33	*dreiunddreißig*	*3 Z und 3 E oder* 33 E
81	einundachtzig	*8 Z und 1 E oder 81 E*

Abbildung 9.3-5 Lösungsblatt 9.3a

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Mit zehn Ziffern können alle Zahlen aufgeschrieben werden.
- Bei Zahlen mit zwei Stellen werden zuerst der Zehner (links) und danach der Einer (rechts) notiert. Aus der Notation der Zahlen kann der Wert der Zahl abgeleitet werden.

BEISPIEL
In der 58 sind fünf Zehner und acht Einer enthalten (insgesamt 58 Einer). Die 58 ist einer mehr als 57 und einer weniger als 59.

- Bei der Sprechweise der Zahlen gibt es einige Unregelmäßigkeiten, manche aufgrund von Abkürzungen, zum Beispiel bei der Sechzig nicht mehr *s* in der Sechs zu sprechen oder bei der Siebzig die Endung *en* der Sieben wegzulassen. Elf und zwölf weichen völlig vom Benennungssystem ab. Würde die Benennung ausgehend von dreizehn, vierzehn, […] neunzehn, zwanzig fortgesetzt, müsste es eigentlich einszwanzig, zweizwanzig usw. heißen. Dem ist nicht so.
- Die Regel für das Sprechen (und Schreiben) des Zahlwortes ab zwanzig lautet:
  Für einen Zehner wird *zig* gesprochen. Welcher oder wie viele Zehner gemeint sind, wird vor *zig* notiert. Mit Fünfzig sind also fünf Zehner gemeint. Die Einer werden zuerst gesprochen und mit dem Wort *und* an die Zehnerzahl gekoppelt, wie dreiundfünfzig. Allerdings werden, wenn Zahlen notiert werden, zuerst die Zehner und an zweiter Stelle die Einer notiert.

9.4 Zahlen visualisieren

Didaktische Ziele
- anhand unterschiedlicher Darstellungen das Wissen über zweistellige Zahlen festigen
- Ordnungsprinzipien zweistelliger Zahlen erforschen

EXPLORATION

Wenn Ordnung geschaffen wird, wenn Strukturen erzeugt werden, sind Bündelungen weitverbreitet. Auch da, wo diese zunächst nicht vermutet werden. Indem die Teilnehmer*innen Alltagsbezüge und Bezüge zum Umgang mit Größen herstellen, entwickelt sich ihr Zahlverständnis im Zahlbereich bis 100. Dabei sind Visualisierungen sehr hilfreich. Daraus kann auf die Beziehungen der Zahlen geschlossen werden.

9.4.1 Hausaufgabe – Zehnerbündel im Alltag

Im Alltag wird häufig gebündelt. Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, *Zehnerbündel des Alltags* zu identifizieren und mit ihrem Smartphone zu fotografieren sowie gemeinsam zu überlegen, wie die Prämierung des ersten bis dritten Platzes einer „Hitliste“ vollzogen wird. In der darauf folgenden Stunde erstellen die Teilnehmer*innen aus den Fotos (die sie sich gegenseitig zeigen) die Hitliste „Zehnerbündel des Alltags“. Zum Beispiel könnten diese Fotos ausgedruckt und im Unterrichtsraum aufgehängt werden. Das könnten zum Beispiel Zehnerpackungen Schokolade oder Großpackungen mit Kosmetikartikeln sein.

Kleine Wettbewerbe machen Spaß und bleiben positiv in Erinnerung. Die Fokussierung auf Zehnerbündel deswegen, weil direkte Bezüge zu dem dekadischen Zahlsystem hergestellt werden können. Es ist einfacher, im Alltag andere Bündelungsformate zu finden (z. B. Fünferpackungen).

9.4.2 Aufgabenblatt 9.4 a und Kursgespräch – Darstellung von Zahlen

Didaktisches Ziel
zweistellige Zahlen als (gebündelte) Zehner und (ungebündelte) Einer darstellen

EXPLORATION

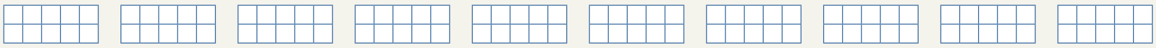
Es gibt unterschiedliche Visualisierungen, um Zehner und Einer übersichtlich darzustellen. Visualisierungen unterstützen die Entwicklung der Vorstellungen von Zahlen. Die Darstellung dient der Wiederholung des bisher Gelernten. Die Teilnehmer*innen interpretieren zunächst (möglichst selbstständig) die bereits vorgegebene Darstellung. Es sind jeweils zehn Zehner nebeneinander dargestellt. In jedem Zehner sind zehn Einer visualisiert. Jedes einzelne Kästchen in der Abbildung symbolisiert einen Einer.

Für die Zahl, die visualisiert werden soll, muss erkannt werden, wie viele Zehner und wie viele Einer (ungebündelt) vorliegen. Dieses Wissen soll auf die Darstellung übertragen werden, zum Beispiel, indem Zehner vollständig (jeweils ein Zehnerfeld wird markiert) und Einer einzeln (entsprechende Anzahl von Einern markieren) übertragen werden.

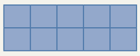
AUFGABENBLATT 9.4 a

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 9.4 a** *Darstellungen* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) und erläutert die Aufgabe.

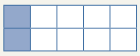
Stellen Sie die Zahlen jeweils mit Hilfe der Kästchen dar. Bemalen Sie dabei die entsprechende Anzahl von Kästchen. Es sind immer zehn Zehner nebeneinander. Jeder Zehner bündelt zehn Einer. Jedes Kästchen entspricht einem Einer.



Visualisierung eines Zehners durch farbiges Ausmalen



Visualisierung eines Zehners durch farbiges Ausmalen



Visualisierung von zwei Einern durch farbiges Ausmalen

Mit dem **Aufgabenblatt 9.4 a** sollen die Teilnehmer*innen ihren Wissensstand zum Zahlbereich bis 100 selbstständig prüfen. Die Kursleitung beantwortet eventuell auftretende Fragen. Aus der Art und Weise, wie die Teilnehmer*innen das Aufgabenblatt bearbeiten, kann die Kursleitung Rückschlüsse auf den jeweiligen Lernstand ziehen und möglicherweise Wiederholungen planen.

Ziel ist es, selbstständig in der vorliegenden Visualisierung die Zehnerfelder und darin eingebettet die zehn Einer zu erkennen und zu nutzen.

Die Aufgabe wird gemeinsam ausgewertet. Wenn Teilnehmer*innen beschreiben können, dass bei 42 vier Zehnerfelder markiert werden müssen und zusätzlich zwei einzelne Einer, zeigt das, wie gut sie die Zehnerbündelung verstanden haben. Die Kursleitung achtet auf die Verbalisierung und ermutigt die Teilnehmer*innen, ihre Lösungen vorzutragen.

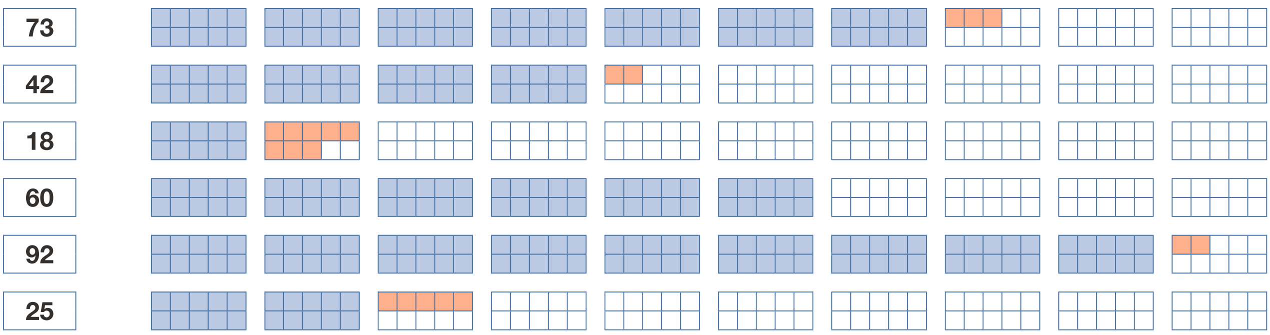


Abbildung 9.4-1 Lösungsblatt 9.4 a

9.4.3 Gruppenarbeit und Kursgespräch – Anordnung von 100 Elementen

Didaktisches Ziel
Einführung von Hunderterfeld mit Fokus auf kardinalem Zahlaspekt (Zehner im Hunderterfeld auf verschiedene Art identifizeren)

EXPLORATION

Eine weitere, häufig verwendete Visualisierungsform ist die sogenannte *Hundertertafel*. Einigen Teilnehmer*innen wird der Gebrauch der Hundertertafel durchaus geläufig sein, denn sie haben früher in der Schule mithilfe der Hundertertafel gerechnet. Nachfolgend soll der Versuch unternommen werden, dass sich die Teilnehmer*innen diese Hunderterdarstellung erschließen und diese als eine von vielen Visualisierungsformen des Zahlbereichs bis 100 interpretieren. Wichtig ist es, beim Veranschaulichen und beim Vertiefen des bisher Erlernten die Zehner/Einer-Struktur (Dezimalstruktur) zu erkennen.

Einzuprägen für den Zahlbereich bis 100 ist Folgendes:
Darstellungen mittels graphischer Elemente veranschaulichen Mengen. In Hunderterdarstellungen lassen sich Zehner und Einer identifizieren. Insgesamt sind 100 Einer geordnet/strukturiert dargestellt.

Das Zahlsystem ohne Veranschaulichung nutzen zu können, ist das eigentliche Lernziel: In Hundert sind zehn Zehner enthalten und in jedem Zehner zehn Einer, damit sind in einem Hunderter auch 100 Einer enthalten.

Wir nutzen hier das sogenannte Hunderterfeld (Abb. 9.4-2 ff.). Da Studien gezeigt haben, dass das Hunderterfeld keineswegs selbsterklärend ist, sollte es nicht beiläufig verwendet werden, sondern nur, wenn seine Struktur im Kurs gründlich besprochen werden kann. Nur dann kann es lernförderlich genutzt werden. Verzichtet wurde auf die Variante der sogenannten Hundertertafel, bei der in jedes Feld zeilenweise und zeilenübergreifend aufsteigend eine Zahl von 1 bis 100 eingetragen wird, da hierzu Forschungsbefunde vorliegen, die zeigen, dass die Hundertertafel in der Regel eher verwirrt als das Verständnis fördert.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen in Zweiergruppen folgende Aufgabe zu lösen.

Ich bitte Sie, 100 Elemente so zu legen, dass man möglichst einfach überprüfen kann, dass es wirklich 100 Elemente sind.

Als Elemente eignen sich 100 Chips, kleine Holzwürfel, Ein-Cent-Stücke, Ein-Euro-Stücke usw.

Die Kursleitung prüft, welche Ideen die Teilnehmer*innen entwickeln, und stellt diese anschließend vor. Alle Teilnehmer*innen gehen von Tisch zu Tisch und tauschen sich über die vorgeschlagenen Anordnungen aus.

Wie kann man einfach überprüfen, dass es auch tatsächlich 100 Elemente sind? Erklären Sie, was Sie gemacht haben.

Eine Möglichkeit ist, zehn Bündelungen mit zehn unsortierten Elementen zu legen.

Mit hoher Wahrscheinlichkeit kommt ein Team (wenn nicht sogar alle Teams) auf die Idee, zehn Reihen mit jeweils zehn Elementen, z. B. Chips, aufzulegen – die sogenannte 10-mal-10-Anordnung.

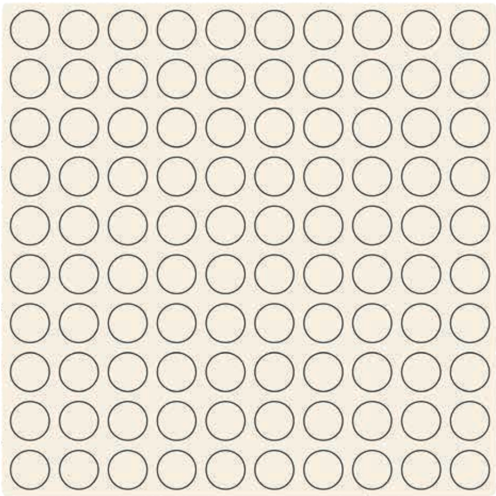


Abbildung 9.4-2 Das Hunderterfeld – Zehn Reihen zu je zehn Chips – 10-mal-10-Anordnung

Das ist eine gute Lösung, denn die 100 Elemente sind übersichtlich angeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, Zehner zu bestimmen, z. B.: Die erste Reihe ist ein Zehner mit zehn Einern. Bei zwei Reihen sind es zwei Zehner mit insgesamt 20 Einern usw.

Die Kursleitung zeigt an der Abbildung reihenweise die Zehner. Dabei werden die Zehner umfahren (Zeigestab, Stift, Zeigefinger).

*Eine **Reihe** bildet einen Zehner ab. Es sind zehn. Zwei Reihen enthalten zwei Zehner, es sind zwanzig usw.*

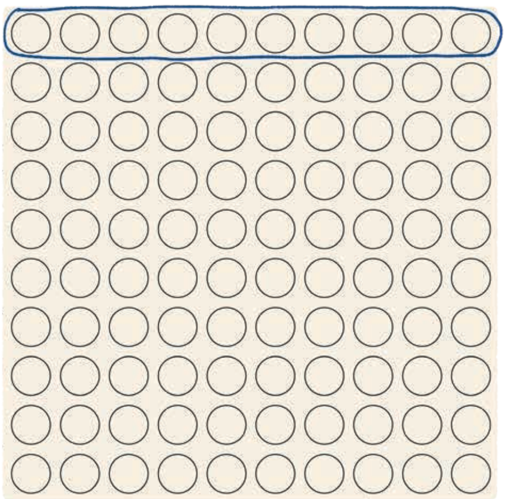


Abbildung 9.4-3 Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 1

*Hier ist die erste **Spalte** ein Zehner. So sind drei Spalten drei Zehner bzw. 30 Einer.*

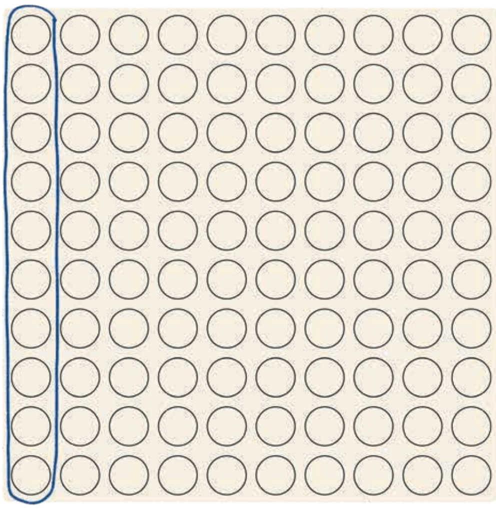


Abbildung 9.4-4 Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 2

Einen Zehner kann man auch so, wie diese Abbildung zeigt, bestimmen.

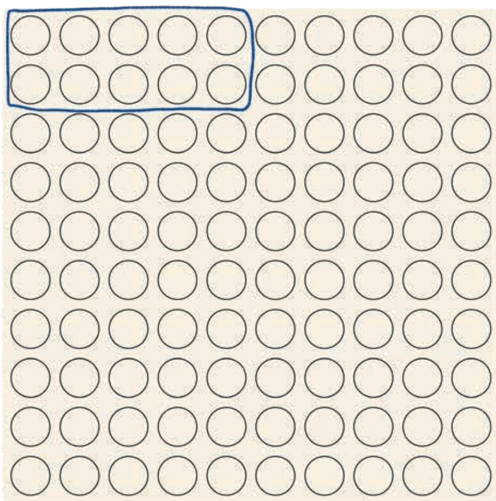


Abbildung 9.4-5 Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 3

Die erste Version ist üblich. Eine Reihe entspricht einem Zehner.

Die Kursleitung bittet einzelne Teilnehmer*innen, verschiedene Zahlen an der Abbildung zu zeigen.

Zum Beispiel: 47.

Vier Reihen entsprechen vier Zehnern, dazu kommen sieben Einer. Wichtig ist, dass man dabei die gesamten 47 Kreise gekennzeichnet werden. Denn 47 entspricht 47 dargestellten Kreisen. Das sind vier Reihen (Zehner) und weitere sieben einzelne Kreise (Einer):

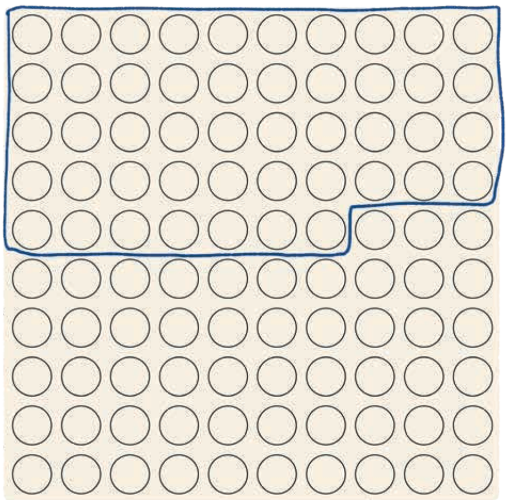


Abbildung 9.4-6 Darstellung der 47

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Für den Zahlbereich bis 100 wurden hier weitere Visualisierungen besprochen. Diese Veranschaulichung, Visualisierung bzw. Zahldarstellung dient dazu, Vorstellungen vom Zahlbereich zu entwickeln: Welche Mengen stellen die Zahlen dar? Und umgekehrt: Wie können größere Mengen strukturiert werden? Welche wiederkehrenden Ordnungsprinzipien sind erkennbar?
- Die wesentlichen Merkmale sind: In der 100 sind zehn Zehner enthalten und in einem Zehner sind zehn Einer enthalten, demzufolge sind in der Hundert 100 Einer enthalten.

9.4.4 Kursgespräch – Wie werden Längen eingeteilt?

Didaktisches Ziel
Zahlenstrahl über das Messen mit dem Lineal kennenlernen

EXPLORATION

Metermaß, Lineal und Zahlenstrahl stellen Abstände oder Längen dar. Während Lineal oder Metermaß in erster Linie zum Messen von Längen da sind, hat der Zahlenstrahl vor allem eine Visualisierungsfunktion. Auch hier sind Strukturen, Muster bzw. Ordnungsprinzipien erkennbar: Alle drei sind unterteilt. Meist in Form von kleinen und größeren Strichen/Markierungen. Die Abstände zwischen den Strichen/Markierungen sind gleich groß. Wie hängt das zusammen? Was wird damit angezeigt? Die gleich großen Abstände stehen jeweils für eine bestimmte Zahl und sie wiederholen sich. Oft sind Zahlen bis 100 erkennbar. Auch hier wird auf die Einteilung in Einer und Zehner zurückgegriffen.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Den Teilnehmer*innen werden Metermaß und Lineal bekannt sein. Zielführende Fragestellungen regen die Diskussion an, die Längeneinteilungen unter dem Aspekt Einer/Zehner/Hunderter zu analysieren. Es geht in dieser Unterrichtssequenz noch nicht darum, sich mit Längenmaßen im Detail zu beschäftigen.

Was haben Metermaß und Lineal mit dem Zahlbereich bis 100 zu tun?

Können Sie beschreiben, wie man Metermaß bzw. Lineal einteilt? Wozu braucht man diese? Zeichen Sie die Einteilung an der Tafel.

Folgende Erkenntnisse sollten gewonnen werden:

- Ein Metermaß bzw. ein Lineal sind regelmäßig eingeteilt.
- Die Abstände zwischen den Markierungen sind immer gleich groß.
- Es gibt kurze Markierungen und längere Markierungen.
- Am Metermaß sind Zahlen bis 100 (oder auch 150 oder mehr) fortlaufend notiert.
- Zehner oder Fünfer sind hervorgehoben.
- Lineale enthalten fortlaufende Zahlen in der Regel bis 17 oder 30.

Die Kursleitung erläutert:

Die gleichen Abstände auf dem Metermaß und dem Lineal stehen für jeweils einen Zentimeter. Jeder Zentimeter besteht aus zehn Millimetern. Dabei ist jeweils der Fünfer markiert. Einhundert Zentimeter sind ein Meter. Man fügt, bildlich gesprochen, Zentimeter um Zentimeter zusammen, bis es schließlich einhundert Zentimeter wie beim Metermaß (oder wie beim Lineal 17 Zentimeter) sind. Die Zahlen, die auf dem Metermaß sind, stehen dabei für die Zahl der Zentimeter. In dieser Abbildung zum Beispiel für sieben Zentimeter.

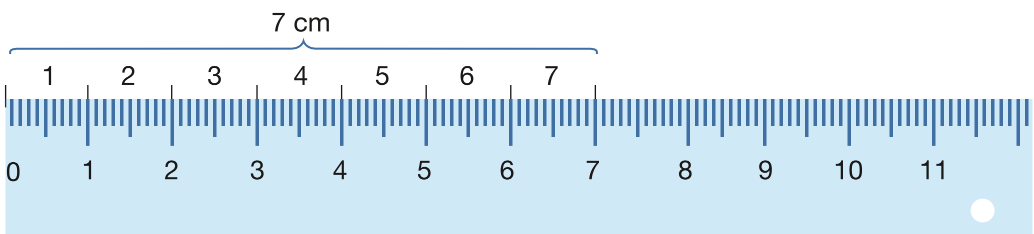


Abbildung 9.4-7 Die Zahl 7 auf dem Metermaß entspricht sieben Zentimetern

AUSBLICK

Ein Millimeter, ein Zentimeter, ein Meter sind universelle Längeneinheiten. Umrechnungen und Einteilungen sind später Gegenstand der Betrachtungen.

Ganz ähnlich ist es beim Zahlenstrahl. Je nachdem, welchen Zahlbereich man darstellen möchte, kann der Zahlenstrahl anders aussehen. In dieser Abbildung sieht man den Zahlbereich bis zehn. An jeder Markierung steht eine Zahl von 0 bis 10. Normalerweise stehen die Zahlen direkt an den Markierungen. Die Markierungen haben gleiche Abstände. Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie man den Zahlenstrahl deuten kann:

Steht die Markierung selbst für die Zahl? Das heißt, ist die Drei die vierte Markierung? Der Zahlenstrahl zeigt Positionen und damit den Ordinalaspekt der Zahlen.

Oder zeigt jeder Abstand zwischen den Markierungen einen Einer? Zeigen drei Abstände oder sogenannte Längeneinheiten die Drei? Hier ist eine Ähnlichkeit zu Metermaß und Lineal zu sehen.

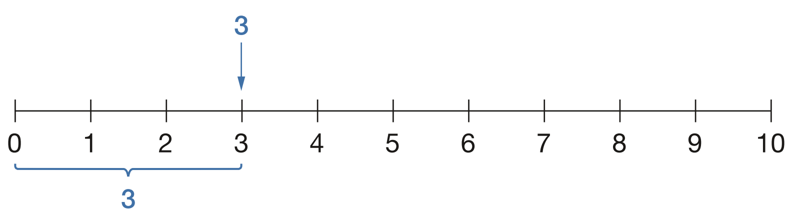


Abbildung 9.4-8 Zahlenstrahl bis 10

Mit der zweiten Möglichkeit kann man zum Beispiel die Addition darstellen.

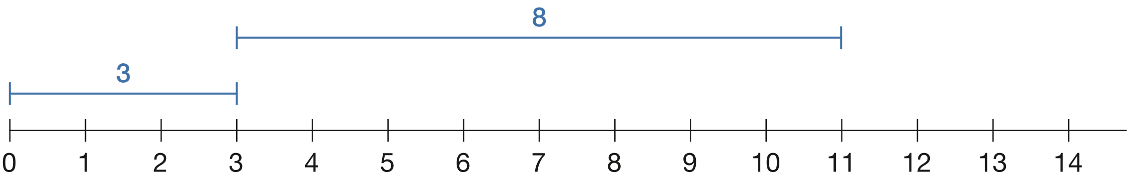


Abbildung 9.4-9 Zahlenstrahl: 3 und 8 sind 11

So, wie in der Abbildung 9.4-9 dargestellt: 3 und 8 sind zusammen 11. Die Zahlen 3 und 8 sind drei und acht Längeneinheiten, die man zu 11 Längeneinheiten zusammenfassen kann. Die Vorstellung, dass Drei und Acht jeweils Markierungen/Punkte des Zahlenstrahls sind, kann nicht die Addition 3 + 8 = 11 erklären. Denn Markierungen/Punkte kann man nicht addieren.

Wenn man umgekehrt als Deutung der Zahlen nur Längen zulässt, dann wird eine Zahlverortung möglicherweise unübersichtlich: Man kann nicht zeigen, wo die Vier im Vergleich zur Drei steht. Der Zahlenstrahl ermöglicht die Deutung der Zahlen als Markierungen/Punkte und als Längen. Beide Sichtweisen geben eine breiten Blick auf Zahlen, beide Sichtweisen haben aber auch Probleme in der Deutung.

Hier ist ein Zahlenstrahl von 0 bis 100 dargestellt – mit Zehnerabständen, -einteilungen oder -längeneinheiten.

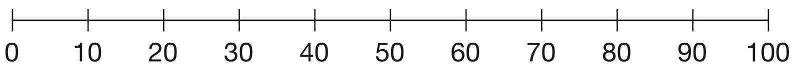


Abbildung 9.4-10 Zahlenstrahl bis 100

Das heißt, zwischen den Markierungen befinden sich neun weitere Zahlen. Zwischen zehn und zwanzig sind das 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Das kann man in der Darstellung des Zahlenstrahls nicht direkt erkennen. Es sind sogenannte Zehnerschritte dargestellt. Man kann sich vorstellen, dass eine Längeneinheit die Zahl Zehn ist.

Hier ist ein Zahlenstrahl mit Fünferabständen oder Fünfereinteilungen. Es gibt weitere Markierungen, die für die Zahlen dazwischen stehen.

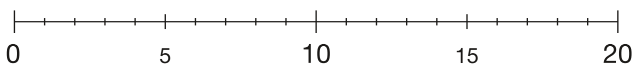


Abbildung 9.4-11 Zahlenstrahl mit Fünferabständen

Man kann fehlende Zahlen ergänzen.

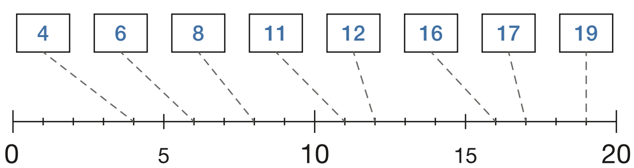


Abbildung 9.4-12 Eintragen von Zahlen am Zahlenstrahl

EMPFEHLUNG

Die Interpretation des Zahlenstrahls mithilfe von Längeneinheiten ist weiterführender. Damit können Bezüge zu Längenmaßen hergestellt und Rechenoperationen erläutert werden. Wichtig bleibt die Betonung, dass es eine Visualisierungsform des entsprechenden Zahlbereiches ist.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Der Zahlbereich wurde von 10 auf 100 erweitert. Das Zusammenfassen von zehn *Einern* zu einem *Zehner* und das Zusammenfassen von zehn Zehnern zu einem *Hunderter* kann vielfältig veranschaulicht werden. Die in den Darstellungen erkannte Ordnung und Struktur wurde verallgemeinert und auf das Zahlsystem übertragen.
- Die Zehn ist die maßgebliche Bezugseinheit für das gesamte, heute gebräuchliche dezimale Zahlsystem. Zehn Einer werden zu einem Zehner zusammengefasst. Zehn Zehner werden zu einem Hunderter zusammengefasst. Zehn Hunderter zu einem Tausender usw. Entlang dieses Bündelungsprinzips ist das *Stellenwertsystem* konstruiert. Die Bündel werden Stellen zugeordnet.
- Es ist ein Ordnungsprinzip, das Zahlen strukturiert und aus dem die Werte der Zahlen ablesbar sind. Alle Zahlen im dekadischen Zahlsystem können mit nur zehn Ziffern notiert/konstruiert werden.
- Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben. Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Zehnerstelle. Die Zahl ist zweistellig. Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig. Das Stellenwertsystem ist damit beliebig erweiterbar. Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.
- Die Schreib- und Sprechweisen der Zahlen bis 100 weisen einige Unregelmäßigkeiten auf. Bedeutend ist die Erkenntnis, dass die Zehner und Einer in einer anderen Reihenfolge aufgeschrieben werden als das Zahlwort gesprochen wird. Für vierundsechzig wird 64 aufgeschrieben.
- Einteilungen von Längen erfolgen strukturiert in Einheiten. Gleiche Abstände entsprechen gleichen Zahlen. Zunächst muss also analysiert werden, wofür welche Einheit, welcher Abstand steht. Welche Zahlen/Längen sollen dargestellt werden? Das ist bei dem Metermaß bzw. Lineal genauso wie beim Zahlenstrahl. Sowohl Metermaß und Lineal als auch ein Zahlenstrahl werden u. a. dafür genutzt, einen begrenzten Zahlbereich, eingeteilt in Längeneinheiten, darzustellen.

ENDNOTEN

1 Näheres vgl.: Wolfram Meyerhöfer: Zweizehneins, Zwanzigeins, Einundzwanzig. Skizze einer stellenwertlogisch konsistenten Konstruktion der Zahlwörter im Deutschen. Pädagogische Korrespondenz, Heft 52, 2-2015, S. 21–41.

2 Gelegentlich berichten Lehrkräfte, dass sie zeitweise mit alternativen Zahlbenennungsmethoden arbeiten und dass dies den Lernenden hilft, die Zahlstrukturen zu verstehen und für effektives Rechnen zu verwenden. Auch ein Switchen in die herkömmliche Zahlbenennung sei dann nicht weiter problematisch.

3 Gaidoschik (2007/2015), S. 173

vhs Lernportal

Deutsch als Zweitsprache

vhs-lernportal.de

kostenfrei – flexibel einsetzbar – mobil

Alphabetisierung und Grundbildung

ein Projekt des Deutschen Volkshochschul-Verbands e.V.

GEFÖRDERT VOM

AlphaDekade 2016 – 2026

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Anhang Kopiervorlagen

Kopiervorlage 1

Anleitung Partnerarbeit

Arbeiten Sie zu zweit. Versuchen Sie viele unterschiedliche Antworten zu finden. Sie können die Aufgaben mit dem Spielgeld nachlegen.

1. Frank hat 17 1-Euro-Münzen. Daher ist seine Geldbörse sehr schwer. Wie kann Frank das Geld umtauschen, damit die Geldbörse leichter ist? (Er möchte dabei kein Geld verschenken.)

1. Variante: ______

2. Variante: ______

3. Variante: ______

______

______

2. Esra hat 53 1-Euro-Münzen. Daher ist ihre Geldbörse sehr schwer. Wie kann Esra das Geld umtauschen, damit die Geldbörse leichter ist? (Sie möchte dabei kein Geld verschenken.)

1. Variante: ______

2. Variante: ______

3. Variante: ______

______

______

3. Zola hat 46 1-Euro-Münzen. Daher ist ihre Geldbörse sehr schwer. Wie kann Zola das Geld umtauschen, damit die Geldbörse leichter ist? (Sie möchte dabei kein Geld verschenken.)

1. Variante: ______

2. Variante: ______

3. Variante: ______

4. Bronco hat 20 Euro in seiner Geldbörse. Welche Scheine und Münzen können das sein?

1. Variante: ______

2. Variante: ______

3. Variante: ______

5. Emil hat 65 Euro in seiner Geldbörse. Welche Scheine und Münzen können das sein?

1. Variante: ______

2. Variante: ______

3. Variante: ______

6. Xenia hat 36 Euro in ihrer Geldbörse. Welche Scheine und Münzen können das sein?

1. Variante: ______________________________

2. Variante: ______________________________

3. Variante: ______________________________

____

7. Lenja hat 100 Euro in ihrer Geldbörse. Welche Scheine und Münzen können das sein?

1. Variante: ______________________________

2. Variante: ______________________________

3. Variante: ______________________________

____

8. Hawi hat 23 Euro. Er hat keine Cent-Münzen. Er meint, dass er da eine 1-Euro-Münze für den Einkaufswagen dabei haben muss. Stimmt das? Gibt es eine Möglichkeit, ohne 1-Euro-Münze auf 23 Euro zu kommen?

____

____

____

____

9. Maja sagt, ein 20-Euro-Schein ist das Gleiche wie wenn man 20 1-Euro-Münzen zusammenklebt. Aber der 20-Euro-Schein ist besser, weil er kleiner und leichter ist. Was denken Sie darüber? Ist das bei allen Scheinen so?

Warum gibt es so viele Münzen und Scheine mit unterschiedlichen Werten?

Warum gibt es keine 3-Euro-Münze, warum keinen 25-Euro-Schein?
Wäre es schlimm, wenn es keine 5-Euro-Scheine gäbe?

ZAHLEN BIS 1.000

11

11 Zahlen bis 1.000

Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer
überarbeitet von Kora Deweis-Weidlinger

Didaktische Ziele

- Erweiterung des Bündelungsprinzips auf Zahlen bis 1.000
- Erweiterung des Stellenwertprinzips auf Zahlen bis 1.000
- dreistellige Zahlen sicher lesen und mit Ziffern schreiben
- Orientierung im Zahlenraum bis 1.000: Nachbarzahlen nennen (Vorgänger und Nachfolger, Zehner- und Hunderternachbarn), Größenvergleiche und Zahlen der Größe nach ordnen, Runden dreistelliger Zahlen
- Kopfrechnen und schriftgestütztes Kopfrechnen mit dreistelligen Zahlen (Addition und Subtraktion mit und ohne Stellenübergang unter Anwendung vorteilhafter Rechenstrategien und unter Nutzung verschiedener Darstellungsmittel)

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Mengen denken („Kardinaler Zahlaspekt“)
- Zahlen als Zusammensetzungen denken („Teile-Ganzes-Verständnis“)
- Operationsverständnis für Addition und Subtraktion
- Automatisierung von Zahlzerlegungen sowie Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 10
- nicht-zählende Lösungsstrategien für Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 20
- grundlegende Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem („Bündelungsprinzip“ und „Stellenwertprinzip“)
- lesen zweistelliger Zahlen
- schreiben zweistelliger Zahlen nach Diktat
- Kenntnis verschiedener Darstellungsmöglichkeiten für zweistellige Zahlen

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Mit der Überschreitung der Zahl 100 in die nächste Bündelungsstufe des Tausenders sollen die Teilnehmer*innen ein Verständnis und eine konkrete Vorstellung von größeren Mengen und Zahlen bekommen. Die Mächtigkeit von 1.000 ist für viele *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* schwer oder gar nicht greifbar.

Daher wird zunächst anhand von Tausenderfeld und -tafel sowie Zahlenstrahl der Aufbau der Hunderter betrachtet. Dabei werden auch die jeweiligen *Nachbarzahlen* – hier die Nachbarzehner und Nachbarhunderter – verortet.

In Analogie zum Zahlbereich bis 100 wird das Wissen über das Stellenwertsystem auf die Zahlen bis 1.000 übertragen. Dabei kommt ein neuer Gedanke hinzu, nämlich dass nun zehn Hunderter zu einem Tausender gebündelt werden, dass also die Idee weitergeführt wird, je zehn Einheiten zu einer neuen Einheit zu bündeln.

Das Umwandeln von Stellenwerten soll zum vertiefenden Verständnis beitragen, dass jede Ziffer einer mehrstelligen Zahl Aufschluss darüber gibt, wie viele Bündel es jeweils sind (Anzahl) und welche Größe jedes Bündel hat (dezimaler Wert). Die Teilnehmer*innen lernen, verschiedene dreistellige Zahlen der Größe nach zu ordnen. Diese Zahlvorstellung wird mit einer Vorstellung der zugehörigen Mengen verbunden. Hierbei dienen die Mehrsystemblöcke (auch *Dienes-Material* genannt) dem Arbeiten auf der Mengenebene. Auch Spielgeld[1] kann ein probates Mittel sein, die Inhalte praktisch zu üben und zu veranschaulichen.

Des Weiteren üben die Teilnehmer*innen sowohl die Ziffernschreibweise als auch die Schreibweise von Zahlwörtern im Vergleich, um sich so die Strukturen und den Aufbau von Zahlen und Zahlwörtern zu veranschaulichen.

Können die Teilnehmer*innen sicher die Nachbarzehner und -hunderter benennen, wird das Runden von Zahlen erarbeitet. Damit lernen die Teilnehmer*innen auch das Abschätzen von Mengen bis 1.000.

Im weiteren Verlauf dieser Unterrichtseinheit werden in Analogie zu Kapitel 9 Zerlegungen der Hunderter-Zahlen und eines Tausenders in Teile vorgenommen. Sind Zerlegungen wie z. B. 400 in 100 und 300 und die sich daraus ergebenden Additions- und Subtraktionsaufgaben verstanden, dann werden dreistellige Zahlen mit Zehnern und Einern zerlegt, z. B. 460 in 400 und 60 oder 345 in 340 und 5 oder in 339 und 6.

Abschließend lernen die Teilnehmer*innen, einen Tausender bzw. dreistellige Zahlen in verschiedene Teile zu zerlegen, die sowohl gleich groß als auch verschieden groß sein können.

Nachfolgend und aufbauend auf die Verortung in Tausenderbuch, -feld und am Zahlenstrahl werden Addition und Subtraktion sowohl mit als auch ohne Übergänge der Zehner- oder Hunderterstelle vermittelt. Die Bündelung und Entbündelung und das Wissen um den Aufbau von Zahlen sind hier hilfreich, um vorteilhafte Rechenstrategien zu finden, mit deren Routinisierung die Teilnehmer*innen dieses Kapitel abschließen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Wenn die Bedeutung der Begriffe *Ziffer* und *Zahl* nicht verstanden sind, kann es sein, dass Teilnehmer*innen Zahlzerlegungen in Ziffern vornehmen, ohne die Stellenwerte zu beachten, z. B. 342 wird zerlegt in die Ziffern 3, 4 und 2, ohne dass damit die jeweilige Anzahl 300, 40 und 2 gedacht wird; damit ist vorteilhaftes Addieren und Subtrahieren mittels Zahlzerlegungen nicht oder schwer möglich.

Bei der Feststellung von Nachbarzehnern und Nachbarhundertern können Schwierigkeiten bei glatten Zehner- oder Hunderterzahlen auftreten: *Nachbarzahl* haben die Teilnehmer*innen im Zahlbereich bis 10 als Vorgänger und Nachfolger kennengelernt. Als Nachbar*innen im Sinne von Nachbarschaft im Haus werden von einigen Teilnehmer*innen evtl. die unmittelbaren Nachbar*innen betrachtet, von anderen auch die in ein paar Häuser weiter. Wie kann sich das auf das Zahlverständnis auswirken? Nachbarzehner einer dreistelligen Zahl wie 128 könnten dann die 120, die 110 oder die 100 sein. Daher ist großer Wert auf die genaue Formulierung *die nächstgrößere bzw. nächstkleinere Zehner-/Hunderterzahlen oberhalb und unterhalb einer Zahl* zu legen. Zudem kann die Bestimmung von Nachbarzehnern für Vielfache von Zehn wie 40, 120, 150 oder für Vielfache von Hundert wie 200 schwierig sein. Wie heißen die Nachbarzehner von 120? Richtige Antwort: 110 und 130, denn es geht um die nächstliegenden Zehner *unterhalb und oberhalb* der Zahl. Die Nachbarzehner eines Vielfachen von Hundert wie z. B. 300 sind demzufolge 290 und 310. Die Nachbarhunderter von 300 sind 200 und 400.

Die meisten *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* empfinden die Subtraktion als sehr viel schwerer als die Addition und haben sich das additive Ergänzen oder das Hochzählen als standardisierten Lösungsweg angeeignet. Sie tun sich erfahrungsgemäß meist sehr schwer, die neuen, vorteilhafteren Rechenwege zu verwenden. Sie erkennen diese nicht als Erleichterungen an, da diese neue und damit subjektiv als schwerer empfundene Wege für sie darstellen. Hier bedarf es einer gezielten Arbeit an vorteilhaften Rechenstrategien und einer systematischen Automatisierung

Die Anwendung der Rechenoperationen ist im Zahlbereich bis 1.000 für *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* nahezu unmöglich; im Zahlbereich bis 100 lässt sich noch mit Fingern und gegebenenfalls stellenweisem Rechnen[2] oder gar Zählen eine Lösung finden. Meistens wird ein Taschenrechner benutzt oder das Rechnen vermieden; von daher kann hier mit starken Aversionen und Ängsten gerechnet werden, denen mit viel Geduld, positivem Zuspruch und mit lebenspraktischen Beispielen entgegengewirkt werden kann.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

- Kapitel 9: Immer zehn – Das Bündelungsprinzip
- Kapitel 9.1: Hier finden sich einführende Erläuterungen zur Bündelung im Zahlbereich bis 100
- Kapitel 9.2: Hier finden sich Erläuterungen zur Konstruktion des Dezimalsystems im Zahlbereich bis 100
- Kapitel 9.3: Hier finden sich Erläuterungen zur Schreibweise zweistelliger Zahlen

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Padberg, Friedhelm: Didaktik der Arithmetik, 3. Auflage 2009:

- Erweiterungen des Zahlenraums, S. 63 ff.
- Strategien des halbschriftlichen Rechnens, S. 164 ff.

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): *DVV-Rahmencurriculum Rechnen*. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.

- Vorgänger/Nachfolger: Stufe 1, S. 22 ff.
- Rechenwege und verschiedene nichtzählende Strategien, Stufe 1, S. 20 ff.
- Verständnis Mehrstelliger Zahlen: Stufe 2, S. 74–85
- Rechenwege: Stufe 2 (Verschiedene nichtzählende Strategien und Zweistellige Zahlen verstehen), S. 66–73
- Zerlegen von zweistelligen Zahlen: Stufe 2, Kapitel 2, Grundlagen für das Verständnis zweistelliger Zahlen, S. 51–56
- Schreiben von Zahlwörtern: Stufe 2, Kapitel 2.4
- Benennung der zweistelligen Zahlen im Deutschen, S. 55
- Addieren und Subtrahieren mit zweistelligen Zahlen: Stufe 1, Kapitel 2.3

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Zahlenstrahl laminiert ohne Werte (abwaschbar)
- Tausenderfeld
- Tausendertafel (Tausenderbuch)
- Mehrsystemblöcke (Dienes-Material): 10 Hunderter-Tafeln und 1 Tausenderwürfel sowie
- Zehner und Einer
- Spielgeld 1 €, 10 €, 100 € in ausreichender Anzahl, mindestens jeweils 10 je Wertigkeit
- Beamer (für Tafelfolien)

11.1 Bündelungen und der Aufbau der Zahlen bis 1.000

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen knüpfen an das Wissen zur Bündelung im Zahlbereich bis 100 an. Mit bloßen Augen nicht erfassbare Mengen werden zu immer gleichen Bündeln zusammengefasst, um dann die deutlich geringere Anzahl der vollen Bündel und der verbleibenden ungebündelten Einer zu bestimmen.

Dabei müssen Strukturen geschaffen werden, um in einer unübersichtlichen Menge zunächst eine grobe Angabe zur Gesamtzahl machen und diese dann mittels der Strukturen leichter konkret bestimmen zu können.

Wurde die Menge bestimmt, nehmen die Teilnehmer*innen hierzu die Darstellung mit den Mehrsystemblöcken, in der Stellenwerttabelle und am Zahlenstrahl vor.

Allgemein wird hier der Aufbau der Zahlen bis 1.000 anhand von Tausenderbuch und Zahlenstrahl vermittelt. Dabei lernen die Teilnehmer*innen mit unterschiedlichen Veranschaulichungsmitteln Gemeinsamkeiten der Zahlen in verschiedenen Hunderterbereichen (z. B. 100 bis 200, 500 bis 600) zu erkennen und diese zu nutzen, um mit Nachbarzehnern und Nachbarhundertern sicher umgehen und Zahlen verorten und deren Mächtigkeit vergleichen zu können. Gemeinsamkeiten von Zahlen sind z. B.:

BEISPIEL
Der Bereich von 50 bis 60 ist genauso groß ist wie der Bereich von 150 bis 160 oder 550 bis 560, nämlich immer 10. Aber auch der Bereich von 380 und 390 weist einen Unterschied von 10 auf.

Jede Zahl kann zerlegt werden in ihre Teile und hat einen Vorgänger, der um 1 kleiner ist, sowie einen Nachfolger, der um 1 größer ist. Für jede Zahl werden die jeweils nächstgrößeren und nächstkleineren Vielfachen von Zehn und Vielfachen von Hundert bestimmt. Die nächsten Vielfachen von Zehn z. B. der Zahl 136 sind die 130 und die 140 (auch *Nachbarzehner* genannt), die Vielfachen von Hundert, die am nächsten an der Zahl 136 liegen, sind die 100 und die 200 (auch *Nachbarhunderter* genannt).

Des Weiteren lässt sich jede Zahl im Stellenwertsystem in ihre Stellenwerte zerlegen. Die Zahl 268 zum Beispiel besteht aus 200 (2 Hundertern), 60 (6 Zehnern) und 8 (8 Einern).

Die Teilnehmer*innen begreifen durch Handeln mit Material und durch Zahldarstellungen mittels Stellenwerttabelle die Vorteile der Bündelung und Entbündelung und die damit einhergehenden Erleichterungen bei der Mengenerfassung von Zahlen bis 1.000.

Im Fokus der Betrachtungen steht hier insbesondere die Struktur des Aufbaus der Zahlen bis 1.000, damit sich die Teilnehmer*innen sicher in diesem Zahlbereich orientieren und die unterschiedlichen Zahlen der Größe nach korrekt einschätzen, miteinander vergleichen und mit Bezug zur 1.000 einordnen können.

11.1.1 Kursgespräch – Einleitung zu Begriff und Bündelung von Tausend

Didaktisches Ziel
erkunden der Zahlwortreihe von 100 bis 1.000 mit besonderem Augenmerk auf Analogien innerhalb verschiedener Hunderter und auf Nachfolger mit Stellenüberschreitungen (zum Wiederentdecken des Bündelungsgedankens)

Das deutsche Zahlwort *Tausend* bedeutet numerisch „‚zehnmal hundert‘, übertragen ‚sehr viel, ungezählt‘.“[3] In der Umgangssprache hat sich der Begriff in verschiedenen Redewendungen wie z. B. „Tausend Dank“ oder „Das habe ich schon tausend Mal gesagt“ etabliert.

Zunächst werden die Grundlagen der Bündelung im Zahlbereich bis 100 wiederholt. Dabei werden folgende Fragen in der Gruppe besprochen:

Warum bündeln?

Mögliche Antwort: weil das Erfassen größerer Mengen leichter wird, wenn man z. B. immer zwei oder vier oder fünf zusammenfasst.

Welche Einheiten zur Bündelung kennen Sie aus dem Alltag (Einkauf: „Six-Pack“, Arbeit: 5 Pakete à 500 Blatt Papier in einem Karton, Hobby etc.)?

Mögliche Antworten:

- Kiste Saft: Sechser-Bündelung
- Kiste Wasser: Zwölfer-Bündelung
- Tintenpatronen: Fünfer oder Sechser in einem Karton
- Eier: Sechser oder Zehner in einem Karton.

Wie kann man besonders praktisch bündeln?

Mögliche Antwort[4]: immer Zehner zusammenzufassen, z. B. zehn Einer zu einem Zehner. Die Teilnehmer*innen werden weiter gefragt:

Welche Zahl kommt nach 100? Welche Zahl ist um eins mehr als 100? Wie heißt der Nachfolger von 100?

Welche Zahl kommt nach 199? Welche Zahl ist um eins mehr als 199? Wie heißt der Nachfolger von 199?

Welche Zahl kommt nach 300? Welche Zahl ist um eins mehr als 300? Wie heißt der Nachfolger von 300?

Welche Zahl kommt nach 399? Welche Zahl ist um eins mehr als 399? Wie heißt der Nachfolger von 399?

Fällt Ihnen etwas auf? Was fällt Ihnen auf?

Wenn als Nachfolger von 100 die 200 genannt wird, können Zählübungen mit den Teilnehmer*innen gemacht werden. Zur Betrachtung des Aufbaus der Zahlen bis 1.000 sollen die Teilnehmer*innen in der Gruppe von 100 an weiterzählen oder beschreiben, wie ihrer Meinung nach die Zahlreihe fortgesetzt wird. Dabei werden verschiedene Zahlbereiche ausgewählt. Als Übung in der Gruppe gibt die Kursleitung z. B. den Bereich ab 280 vor und lässt die Teilnehmer*innen der Reihe nach weiterzählen bis 320. Weiß jemand die nächste Zahl nicht, sagt sie*er „weiter“ und die*der nächste Teilnehmer*in fährt fort.

Dann wird im Bereich von 890 bis 930 fortgesetzt und schließlich von 985 bis 1.020. Treten oberhalb von 1.000 Schwierigkeiten auf, hilft die Kursleitung und verweist auf die Zahlenreihe bis 100, der jetzt lediglich ein Tausender vorangestellt ist.

Für die Teilnehmer*innen, die Zählen für sich weiter üben möchten, gibt die Kursleitung als Hausaufgabe das Schreiben einer Zahlenrolle: Ein Blatt Papier wird in der rechten Spalte von oben beginnend nach unten mit den Zahlen in Einerschritten beschrieben. Dabei ist darauf zu achten, dass die Stellenwerte genau untereinandergeschrieben werden. Ist das Blatt zu Ende, wird die Spalte abgeschnitten, kann oben an der nächsten Spalte angeklebt werden und in der nächsten Spalte wird die nächste Zahl notiert. Diese Übung kann für den ganzen Bereich bis 1.000 und darüber hinaus durchgeführt werden oder für einzelne Zahlbereiche, in denen das Zählen schwerfällt, wie z. B. bei Hundertübergängen. Zu einer Zählübung wird diese fast meditative Arbeit, wenn dazu die Zahlwörter gesprochen werden, so die Aussprache von den Teilnehmer*innen bereits verstanden ist.

Hierbei erkennen die Teilnehmer*innen, dass der Aufbau der Zahlen in allen Bereichen analog ist. Der genaue Aufbau wird nachfolgend erarbeitet.

11.1.2 Kursgespräch und Einzelarbeit – Große Mengen schätzen, bündeln und Anzahl bestimmen

Didaktische Ziele

- Einsicht in die Vorteilhaftigkeit des Zusammenfassens (Bündelns) in kleinere Teilmengen immer derselben Größe beim Ermitteln der Anzahl unstrukturierter Mengen größer als 100
- Erkenntnis, dass mit zunehmender Bündelgröße die Anzahl der Bündel kleiner wird
- Einsicht in die Vorteilhaftigkeit des fortschreitenden Bündelns im Zehnersystem (10 E sind 1 Z, 10 Z sind 1 H, 10 H sind 1 T, etc.)

Je größer eine unstrukturierte Menge, desto schwerer wird es, die Anzahl zu schätzen. Schätzen als grobe Bestimmung einer Anzahl erfordert gedankliches Vergleichen mit Repräsentanten. In der ersten Aufgabe von **Aufgabenblatt 11.1a**[5] sollen die Teilnehmer*innen eine unsortierte Anzahl von Knöpfen schätzen. Die Kursleitung macht hier zunächst keine Vorgaben zur Genauigkeit des Schätzergebnisses, um Erkenntnisse über die Vorgehensweise und Gedankengänge der Teilnehmer*innen zu gewinnen, z.B. ob die Teilnehmer*innen in der Lage sind, vorhandene Strukturen zu nutzen oder sich im Falle fehlender Strukturen welche zu schaffen und wie sie dabei vorgehen.

Zu **Aufgabenblatt 11.1 a** zeigt die Kursleitung das Knopfbild und verteilt Kopien von dem Bild (zunächst ohne Zehner-Bündelung):

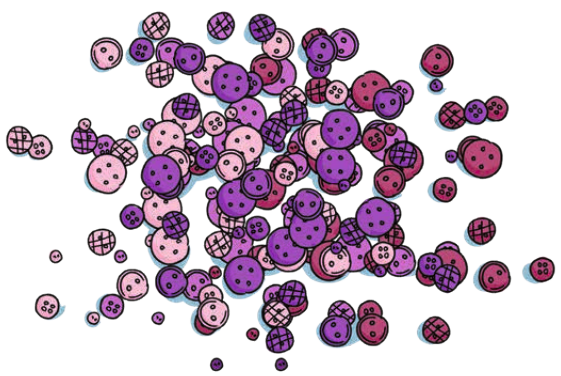


Abbildung 11.1-1 Große Mengen schätzen und bestimmen – Wie viele sind es?

Die Teilnehmer*innen sollen schätzen oder überschlagen, wie viele Knöpfe das sind. Dabei können sie auf der Kopie Markierungen vornehmen. Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen nach ihren Schätzergebnissen und wie sie dabei vorgegangen sind. Es können z.B. folgende Antworten bzgl. der Vorgehensweise genannt werden:

- geraten und irgendeine Zahl genannt
- grob geschätzt
- möglichst genau geschätzt durch Suchen einer Struktur und Bündelung, z.B. in kleineren Mengen (welche Größe hatten diese Mengen?) oder in Rastern

Für diejenigen Teilnehmer*innen, die für Mengen größer als 100 ein geringes oder gar kein Vorstellungsvermögen haben, ist eine Schätzung in einer Größenordnung von mehr als 100 schwer oder gar nicht leistbar, sie werden wahrscheinlich raten. Das Strukturieren großer unsortierter Mengen in kleinere Teilmengen immer derselben Größe (z.B. Zweier-, Dreier-, Fünfer-, … -Gruppen) kann dabei hilfreich sein, möglichst genau die tatsächliche Anzahl zu schätzen:

Die Teilnehmer*innen sollen beschreiben, wie sie hier vorgegangen sind:

Haben Sie direkt geschätzt mit einem Blick auf die Menge? Wie haben Sie das hier gemacht?

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen weiter:

In welchen Situationen muss man Mengen schätzen?

Was ist der Unterschied zwischen Raten und Schätzen?

Ziel des Kursgesprächs ist es, auf die Bündelung kleinerer, grob markierter Teilmengen als Hilfsmittel zur leichteren Anzahlbestimmung zu kommen.

Nun sollen die Teilnehmer*innen Aufgabe 2 in Einzelarbeit lösen. Dabei geht es um das strukturierte Erfassen von Mengen, speziell um das Bündeln. Die Teilnehmer*innen sollen hier eine andere Bündelungssystematik verwenden als Zehner und sich eine erste Bündelungsstufe[6] überlegen, um dann immer gleiche Bündel zu markieren. Die Kursleitung verweist dazu auf Seite 2 von Aufgabenblatt 11.1a. Hier sind anstelle der Knöpfe Punkte geordnet abgebildet – und zwar in der gleichen Anzahl.

Die Teilnehmer*innen sollen zunächst die Punkte bündeln und dazu als Bündelungszahl eine beliebige Zahl kleiner als 10 nutzen. In der Tabelle sollen sie vermerken, welche Bündelungszahl sie verwenden, wie viele Bündel sie haben, wie viele ungebündelte Einer dann verbleiben und wie groß die Gesamtanzahl ist.

Für diejenigen Teilnehmer*innen, die die Aufgabe zügig bearbeiten oder wenn sich jemand verschreibt o. ä., hält die Kursleitung genügend Kopien von Seite 2 zur Verfügung. Diese können Teilnehmer*innen auch zum Üben für zu Hause mitgegeben werden.

Die Kursleitung gibt den Teilnehmer*innen 5–15 Minuten und fragt anschließend nach der Vorgehensweise sowie den Ergebnissen:

> *Wer hat wie gebündelt?*
>
> *Wie sehen die Tabellen aus? Wie viele Einer sind ungebündelt?*

Die Kursleitung notiert an der Tafel alle Lösungen, die die Teilnehmer*innen erarbeitet haben. Hier werden alle Varianten gezeigt, damit die Teilnehmer*innen ihre Ergebnisse vergleichen können.

Werden für die gleiche Bündelgröße verschiedene Anzahlen von Bündeln genannt, wird im Gespräch nach möglichen Ursachen dafür gesucht. Diese können sein:

- Zählfehler beim Bündeln
- Zählfehler beim Erfassen der Anzahl der Bündel.

Die Ergebnisse für die einzelnen Bündelungsvarianten werden von der Kursleitung präsentiert, falls diese nicht von Teilnehmer*innen genannt wurden.

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Zweier	
1. Stufe			198	

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Dreier	
1. Stufe			132	4

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Vierer	
1. Stufe			99	

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Fünfer	
1. Stufe			79	4

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Sechser	
1. Stufe			66	

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Siebener	
1. Stufe			56	4

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Achter	
1. Stufe			49	4

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Neuner	
1. Stufe			44	4

	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Zehner	
1. Stufe			39	6

Abbildung 11.1-2 Ergebnisse der ersten Bündelungsstufe zu Aufgabenblatt 11.1a, Aufgabe 2 und Aufgabe 3

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen, was ihnen auffällt. Es soll hier erkannt werden, dass mit zunehmender Bündelgröße die Anzahl der Bündel kleiner wird.

Frage an die Teilnehmer*innen:

Warum ist das so? Kann jemand das erklären?

Können Sie nun die Anzahl der Punkte bzw. Knöpfe bestimmen?

Die Kursleitung hilft hier ggf. beim Ermitteln der Anzahl für die einzelnen Bündelungsvarianten:

Zweier: $198 \cdot 2 = 396$
Dreier: $132 \cdot 3 = 396$
Vierer: $99 \cdot 4 = 396$
Fünfer: $(79 \cdot 5) + 1 = 395 + 1 = 396$
Sechser: $66 \cdot 6 = 396$
Siebener: $(56 \cdot 7) + 4 = 392 + 4 = 396$
Achter: $(49 \cdot 8) + 4 = 392 + 4 = 396$
Neuner: $44 \cdot 9 = 396$.

Die Komplexität der Berechnung verdeutlicht, wie schwierig die Bestimmung der Anzahl einer großen Menge sein kann, wenn in anderen Bündeln als in Zehnern gebündelt wird. Sie verdeutlicht aber auch, dass diese Berechnung immer noch schneller ist als das Zählen. Im Zweifelsfall können die strukturierten Mengen mit dem Taschenrechner ausgerechnet werden.

Wir haben uns hier eine erste Stufe der Bündelung angesehen. Wie kann man nun weiter bündeln? Also kann man Bündel-Bündel oder noch eine weitere Stufe mit Bündel-Bündel-Bündeln zusammenfassen?

Hat jemand eine Idee, warum es höhere Stufen der Bündelung gibt?

Welche Möglichkeiten der Bündelung fallen Ihnen ein?

In Kapitel 9.1 *Strukturen, Bündel, Muster, Einheiten* haben die Teilnehmer*innen bereits Zahlen bis 100 gebündelt, auch in anderen Bündelungseinheiten als Zehnern. Wenn die Antwort nicht genannt wird, verweist die Kursleitung darauf, dass gerade für sehr große Mengen die weitere Bündelung in mehreren Stufen vorteilhaft ist.

Im Alltag gibt es viele Varianten bei den verschiedenen Bündelungsstufen, zum Beispiel, wenn man Wein verpacken möchte.

Wir betrachten im weiteren den Fall, dass man 310 Flaschen Wein verpacken möchte:

BEISPIEL

In einem Karton sind sechs Flaschen (1. Bündelungsstufe, kurz: 1. Stufe), auf einer Palette (2. Bündelungsstufe, kurz: 2. Stufe) sind je Ebene acht Kartons, eine Palette (3. Bündelungsstufe, kurz: 3. Stufe) umfasst vier Ebenen. Die Bündelungsstufen sind dann:

1. Stufe: immer sechs Flaschen in einen Karton

2. Stufe: in einer Ebene immer acht von den Sechser-Kartons

3. Stufe: vier Ebenen mit je acht Kartons à sechs Flaschen

Graphisch würde die Bündelung wie folgt aussehen:

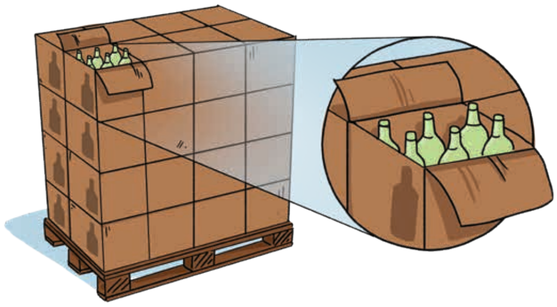


Abbildung 11.1-3 „Gebündelte“ Weinflaschen in Weinkartons auf einer Palette

Schematisch lässt sich die Situation wie folgt darstellen:

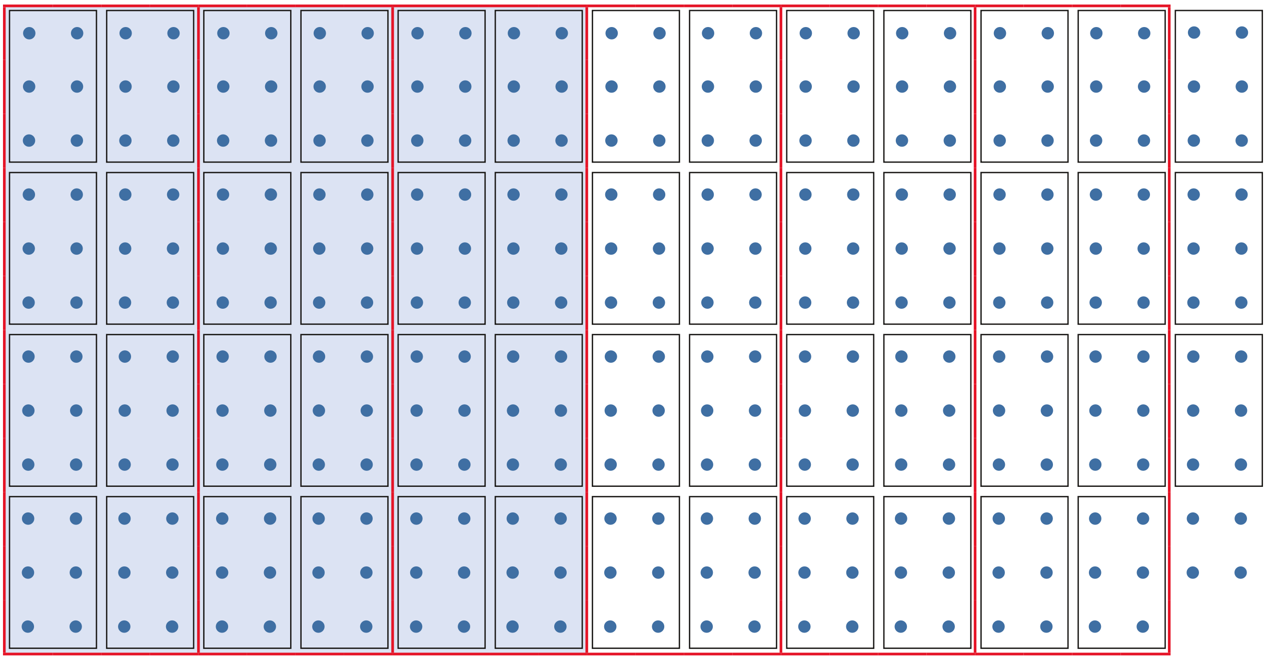


Abbildung 11.1-4 Schematische Darstellung der Bündelung von 310 Weinflaschen

Damit ergibt sich folgende Tabelle zu diesem Beispiel:

	Bündel: Palette (6 Ebenen mit 8 Kartons á 6 Fl.)	Bündel: 1 Ebene (8 Kartons mit je 6 Flaschen)	Bündel: 6er	E
1. Stufe			51	4
2. Stufe		6	3	4
3. Stufe	1	2	3	4

Abbildung 11.1-5 Bündelungstabelle Weinflaschen

BEISPIELE

In der ersten Bündelungsstufe wurden immer sechs Flaschen in Kartons verpackt. Es ergibt sich: 51 Kartons · 6 Flaschen je Karton = 306 Flaschen in Sechser-Kartons, 4 einzelne Flaschen (Einer) bleiben übrig (310 – 306 = 4), bleiben also ungebündelt.

In der zweiten Bündelungsstufe wurden immer acht Kartons auf einer Ebene nebeneinandergelegt. Bei 51 Kartons ergeben sich:
6 Ebenen mit je 8 Kartons à 6 Flaschen:
6 Ebenen · 8 Kartons = 48 Kartons auf 6 Ebenen. Es bleiben also 3 Kartons übrig und die einzelnen 4 Flaschen, die kein volles Sechser-Bündel ergaben.

In der dritten Bündelungsstufe werden immer 6 Ebenen mit 8 Kartons à 6 Flaschen auf einer Palette zusammengepackt:
Von 6 Ebenen passen 4 Ebenen auf eine Palette (eine 1 in der 3. Stufe), 2 Ebenen kommen auf die nächste Palette, die jedoch nicht fertig gebündelt ist. Die ungebündelten Kartons und Einzelflaschen sind wieder mit aufgeführt.

Die Prüfung der Gesamtzahl Weinflaschen ergibt:

1 Palette · 4 Ebenen · 8 Kartons je Ebene · 6 Flaschen je Karton = 192 Flaschen

2 Ebenen · 8 Kartons je Ebene · 6 Flaschen je Karton = 96 Flaschen

3 Kartons · 6 Flaschen je Karton = 18 Flaschen

4 einzelne Flaschen = 4 Flaschen

Gesamt: 192 Fl. + 96 Fl. + 18 Fl. + 4 Fl. = 310 Flaschen

Entsprechend diesem Beispiel sollen die Teilnehmer*-innen weiter die Knöpfe auf dem **Aufgabenblatt 11.1 a**[7] bündeln: Die Bündel der 1. Stufe sollen zu einem weiteren Bündel zusammengefasst werden, um diese Bündel dann weiter zu bündeln.

Die Teilnehmer*innen überlegen sich verschiedene Bündelungsstufen mit abweichender Anzahl je Bündel oder auch gleicher Bündelgröße auf jeder Stufe. Dafür bekommen die Teilnehmer*innen genügend Zeit (ca. 10–15 Minuten). Bei Bedarf hält die Kursleitung weitere Kopien der Seite (3 oder) 4 von **Aufgabenblatt 11.1 a** zur Verfügung.

Nach Ablauf der Zeit vergleichen die Teilnehmer*innen ihre Ergebnis-Tabellen. Eine Lösung kann von der Kursleitung präsentiert werden. Hier wurden in der ersten Stufe immer 5 Knöpfe gebündelt, in der zweiten Stufe dann immer 6 von den Fünfer-Bündeln und in der dritten Stufe schließlich 4 von den Sechsern à 5:

	Vierer (von den Sechsern à 5)	Sechser (von den 5ern)	Fünfer	Einer
1. Stufe			79	1
2. Stufe		13	1	1
3. Stufe	3	1	1	1

Abbildung 11.1-6 Knöpfe bündeln – Beispiel-Bündelung (5/6/4)

Aus dieser Tabelle lässt sich schwer die tatsächliche Anzahl der Knöpfe ermitteln, wenn man nicht gut rechnen kann. Die Kursleitung oder ein*e Teilnehmer*in präsentiert den Rechenweg:

1 Einer	+	1 Fünfer	+	1 Sechser (à 5)	+	3 Vierer (à sechs Fünfern)
1	+	5	+	6 · 5	+	3 · 4 · (6 · 5)
1	+	5	+	30	+	3 · (4 · 30)
1	+	5	+	30	+	3 · 120
1	+	5	+	30	+	360

Gesamt: 1 + 5 + 30 + 360 = 396

Die Kursleitung fasst zusammen, dass die Bündelung zu verschiedenen Bündelgrößen auf mehreren Bündelungsstufen zwar übersichtlicher wird als eine unsortierte Anzahl, dass aber die Darstellung der Bündel-Bündel-Bündel in der Tabelle zur Ermittlung der genauen Anzahl einer großen Menge deutlich unübersichtlicher ist als eine Bündelung mit immer gleichen Bündelungsgrößen auf jeder Stufe. In unserem Zahlsystem werden deshalb immer je zehn gebündelt.

Nun werden die Punkte auf Seite 2 zu **Aufgabenblatt 11.1 a** immer zu Zehnern zusammengefasst. Man kann dann mit Hilfe des Bildes folgende Argumentation führen: Bildet man Zehnerbündel, so findet man 39 Zehnerbündel, 6 einzelne Knöpfe bleiben ungebündelt.

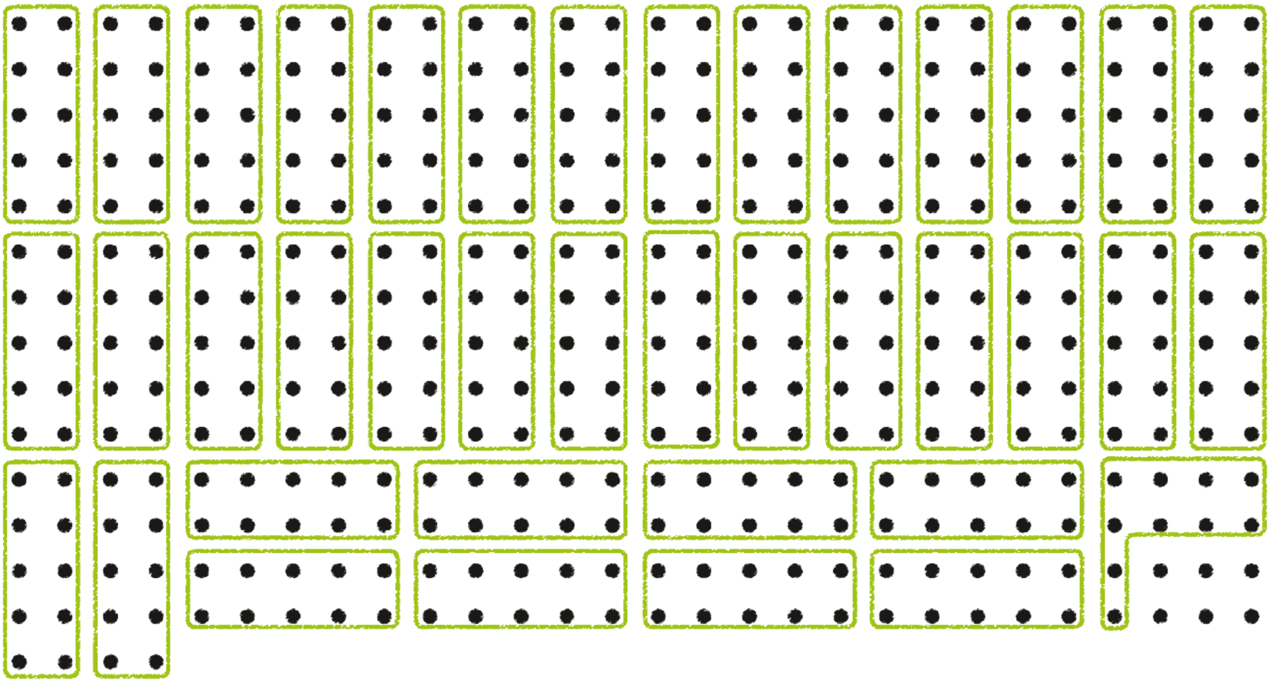


Abbildung 11.1-7 Bündelung von „Knöpfen" in 39 Zehnern (Rest 6 Einer)

Die Darstellung in der Tabelle sieht dann wie folgt aus:

	Bündel:	E
	Zehner	
1. Stufe	39	6

An dieser Stelle lässt sich bereits die tatsächliche Anzahl leicht ermitteln:

$39 \cdot 10 + 6 = 390 + 6 = 396.$

Bildet man nun weitere Zehner-Zehner-Bündel, also Bündel aus jeweils 10 Zehnern (Hunderter), so erhält man drei von diesen Bündeln. Dabei bleiben neun Zehnerbündel ungebündelt und auch die sechs einzelnen Knöpfe bleiben ungebündelt.

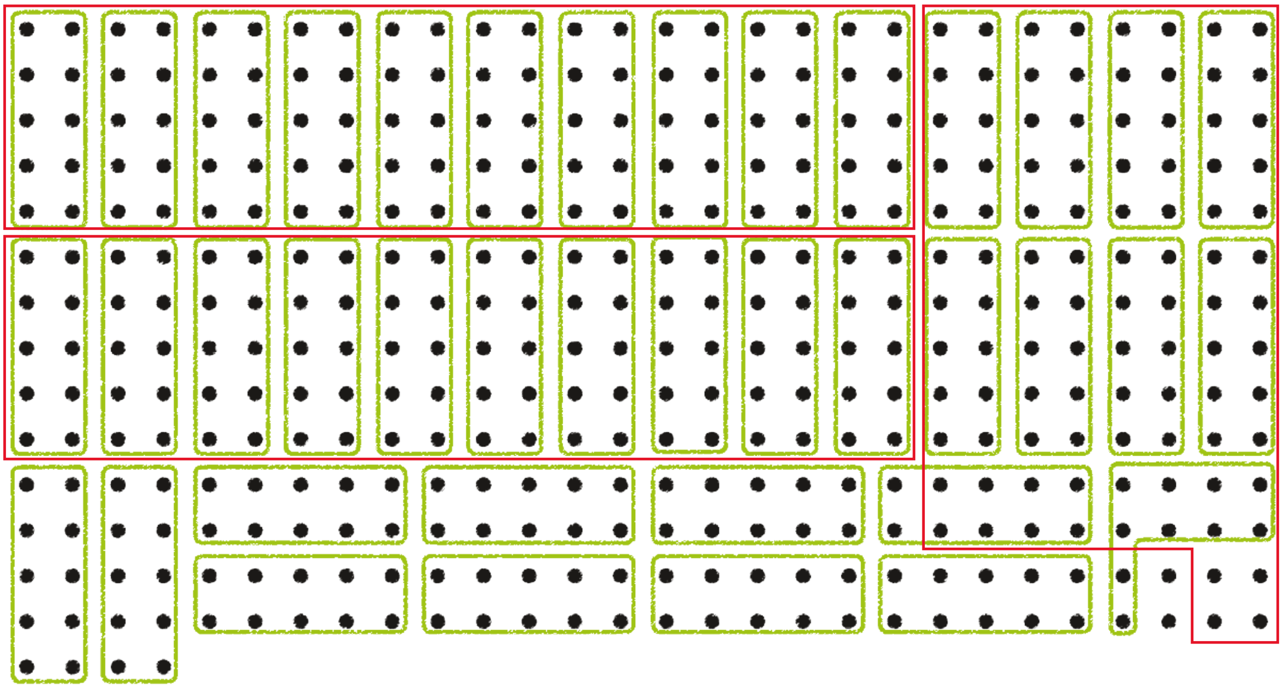


Abbildung 11.1-8 Bündelung von „Knöpfen" in 3 Hundertern, 9 Zehnern (Rest 6 Einer)

Die Tabelle wird wie folgt ergänzt:

	Bündel	Bündel	E
	Hunderter (10 Zehner)	Zehner	
1. Stufe		39	6
2. Stufe	3	9	6

Die 30 Zehner werden zu drei Bündeln mit jeweils 10 Zehnern, also zu drei Hundertern, neu gebündelt. Die Anzahl lässt sich nun eindeutig erkennen, ohne rechnen zu müssen: Es sind insgesamt 396 Knöpfe.

11.1.3 Kursgespräch – Nachbarzahlen

Didaktische Ziele
- Vorgänger und Nachfolger dreistelliger Zahlen nennen (besonderes Augenmerk auf Stellenübergänge zur Festigung des Bündelungsverständnisses)
- Nachbarzehner und Nachbarhunderter dreistelliger Zahlen nennen

Nachbarzahlen sind bei der Erweiterung des Zahlbereichs bis 1.000 von großer Bedeutung: Sie werden beim Runden und Ermitteln von Überschlägen benötigt und sind hilfreich bei der Addition und Subtraktion zwei- und mehrstelliger Zahlen. Daher werden diese Begriffe vor dem Aufbau des Tausenders erläutert.

Unter *Nachbar*innen* versteht man im allgemeinen Sprachgebrauch die in den angrenzenden oder nächstgelegenen Gebäuden bzw. Wohnungen wohnenden Personen. Beim Rechnen werden die Nachbarn als *Nachbarzahlen* bezeichnet. Zahlen, die unmittelbar an eine andere Zahl angrenzen, werden *Vorgänger* und *Nachfolger* genannt. Für die Zahl 3 bedeutet das, dass die 2 und die 4 die Nachbarzahlen sind. Dabei ist die 2 der *Vorgänger* der 3 und die 4 der *Nachfolger* der 3.

Für die Zahl 17 ist dann 16 der Vorgänger und 18 der Nachfolger, für die Zahl 155 ist 154 der Vorgänger und 156 der Nachfolger.

Am Zahlenstrahl dargestellt:

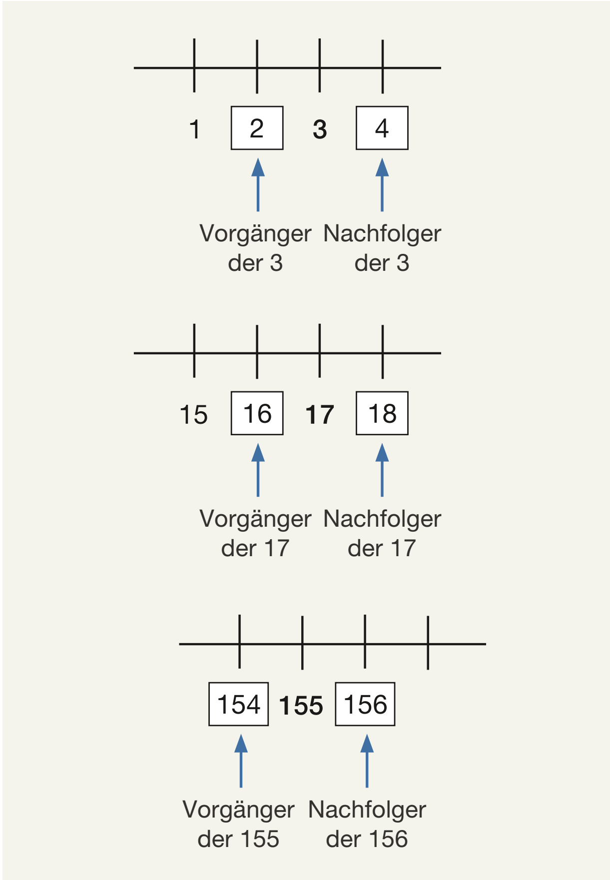


Abbildung 11.1-9 Vorgänger und Nachfolger am Zahlenstrahl

Der *Vorgänger* einer Zahl ist also immer Eins weniger als die Zahl, d. h. die Zahl minus Eins:

3 – 1 = 2 und 17 – 1 = 16 und 155 – 1 = 154.

Der *Nachfolger* einer Zahl ist immer Eins mehr als die Zahl, d. h. die Zahl plus Eins:

3 + 1 = 4 und 17 + 1 = 18 und 155 + 1 = 156.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen zu verschiedenen Zahlen nach deren Vorgängern und Nachfolgern:

Was sind die Vorgänger und Nachfolger von: 9 118 222 429 699 801

Treten hier Schwierigkeiten innerhalb eines Zehners auf, wären die Subtraktion um Eins und die Addition um Eins zu wiederholen. Treten die Schwierigkeiten aber bei Stellenüberschreitungen auf, sollte das Prinzip des Bündelns ganz gezielt auf Aufgaben übertragen werden, bei denen zu 9 Einern noch ein Einer dazukommt und in der Folge die 10 Einer zu einem neuen Zehner gebündelt werden. Bei Schwierigkeiten bei Stellenunterschreitungen (Vorgänger von reinen Zehnern oder Hundertern) wäre ein Arbeiten an Entbündelungen angeraten. Vorgänger von reinen Zehnern sind dabei einfacher zu ermitteln, weil nur ein Zehner in 10 Einer entbündelt werden muss, um einen Einer wegnehmen zu können. Vorgänger von reinen Hunderten können nur mit zweischrittigem Entbündeln ermittelt werden: erst wird ein Hunderter in 10 Zehner getauscht, davon wird ein Zehner in 10 Einer getauscht, um einen Einer wegnehmen zu können. Hartnäckige Schwierigkeiten erfordern hier eine systematische Erarbeitung, bevor die Automatisation von Zahlwortreihen in Angriff genommen werden kann.

Als *Nachbarzehner* einer Zahl werden die *nächsten, also am nächsten liegenden, Vielfachen von Zehn* bezeichnet, die oberhalb und unterhalb dieser Zahl liegen. Kennzeichen der Vielfachen von Zehn ist, dass eine Null an der Einerstelle ist, wie z. B. 20, 30, 90, 100, 130, 250 etc., da immer 10 Einer zu einem Zehner gebündelt sind und kein ungebündelter Einer vorliegt.

Für die o. g. Beispielzahlen 3, 17 und 155 wären dann folgende Zahlen die Nachbarzehner:

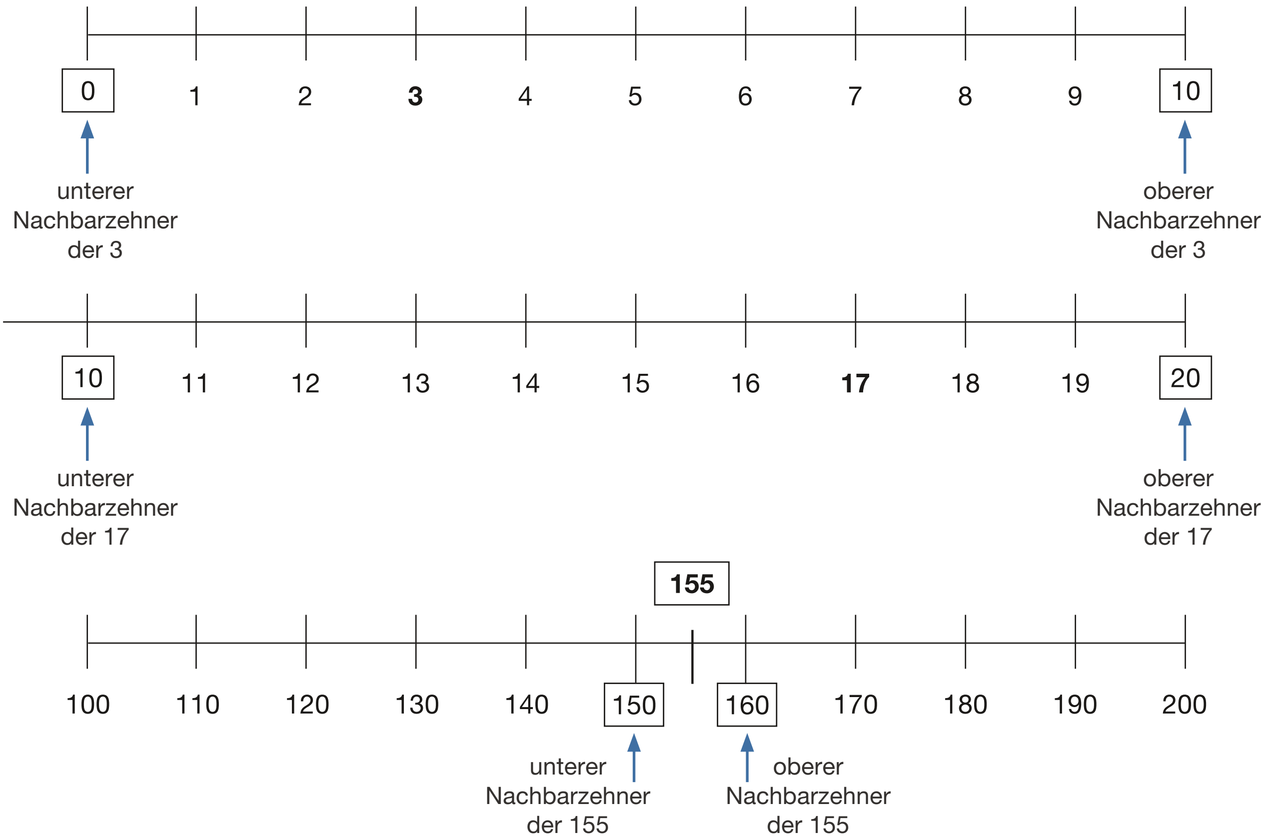


Abbildung 11.1-10 Nachbarzehner für 3, 17, 155 am Zahlenstrahl

In der Hundertertafel oder ihrer Erweiterung – dem Tausenderbuch – ist die Darstellung der Nachbarzehner nicht vorteilhaft, da die 0 hier oberhalb der 10 angeordnet zu denken ist und da der Bereich zwischen den Nachbarzahlen schwerer zu erkennen ist:

									0
1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10

6	7	8	9	10
16	**17**	18	19	20

144	145	146	147	148	149	150
154	**155**	156	157	158	159	160

Abbildung 11.1-11 Nachbarzehner für 3, 17, 155 im Tausenderbuch (Ausschnitte)

Die Bestimmung der Nachbarzehner kann auf unterschiedliche Weise erfolgen:

- Arbeit mit Wissen: die Teilnehmer*innen kennen die Zahlreihe und wissen, wie die Zehnerzahlen vor und nach der betrachteten Zahl heißen
- Eintragen/*Eindenken* der Zahl in die Stellenwert-Tafel: 198 hat 9 Zehner, also 190, den nächsten Zehner kennen die Teilnehmer*innen: 200:

H	Z	E
1	9	8

- Am Zahlenstrahl Zahlen in Zehnerschritten eintragen und die Zahl, für die die Nachbarzehner bestimmt werden soll, eintragen:

Für 198 würde der Zahlenstrahl wie folgt aussehen:

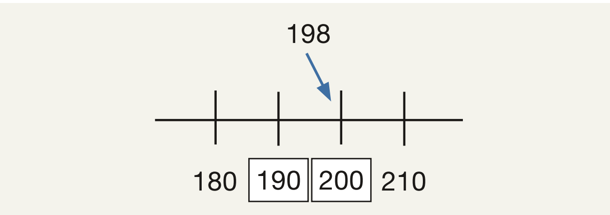


Abbildung 11.1-12 Nachbarzehner für 198 am Zahlenstrahl

- Die Einer wegdenken ergibt den unteren Nachbarzehner, die Einer zum nächsten Zehner ergänzen ergibt den oberen Nachbarzehner.
- Darstellung einer Zahlenreihe in Zehner- oder Hunderterschritten:

  250 260 270 280 290 300
  oder

  200 210 220 230 240 250 260
  270 280 290 300
  oder

  100 200 300 400 500 600 700 800
  900 1.000

Hier lässt sich jeweils die Zahl, für die Nachbarzahlen bestimmt werden sollen, einem Bereich zwischen zwei anderen Zahlen einordnen, die dann jeweils die Nachbarn darstellen.

Hier ist präziser Sprachgebrauch gefragt: Wenn die Nachbarzehner „die am nächsten liegenden Vielfachen von Zehn kleiner und größer einer Zahl“ sind, dann kann eben nicht die Zahl selbst gemeint sein, sondern der Nachbarzehner muss oberhalb bzw. unterhalb der Zahl liegen – und dann ist der Begriff auch für alle Zahlen bestimmt, die Vielfachen von Zehn sind von dieser Begriffsbildung nicht ausgenommen. Für sie sind die Unterschiede zu den Nachbarzehnern genau 10: Die Nachbarzehner von 20 sind die 10 und die 30, von 30 sind die Nachbarzehner 20 und 40 usw. Für Vielfache von Zehn wie 20, 30, 40 kann die Nennung der Nachbarzehner manchen Teilnehmer*innen Schwierigkeiten bereiten. Es könnte ja sein, dass eine Zahl ihr eigener Nachbarzehner ist, dass also der Nachbarzehner von 20 die Zahl 20 selbst ist – oder dass der Begriff „Nachbarzehner“ für Zehnerzahlen nicht bestimmt ist. Hier ist eine Gelegenheit, die Kraft von präziser Begriffsbildung zu erleben: Wenn die Nachbarzehner „die am nächsten liegenden Vielfachen von Zehn kleiner und größer einer Zahl“ sind, dann kann eben nicht die Zahl selbst gemeint sein, sondern der Nachbarzehner muss kleiner bzw. größer als die Zahl sein – und dann ist der Begriff auch für alle Zahlen bestimmt, die Vielfachen von Zehn sind von dieser Begriffsbildung nicht ausgenommen. Für sie sind die Unterschiede zu den Nachbarzehnern genau 10: Die Nachbarzehner von 20 sind die 10 und die 30, von 30 sind die Nachbarzehner 20 und 40 usw.

Zur Übung fragt die Kursleitung die Teilnehmer*innen zu verschiedenen Zahlen nach deren Nachbarzehnern:

Welche sind die Nachbarzehner zu folgenden Zahlen?
9 97 122 220 399 801

Die richtigen Antworten sind:
- **für 9:** 0 und 10
- **für 97:** 90 und 100
- **für 122:** 120 und 130
- **für 220:** 210 und 230
- **für 399:** 390 und 400
- **für 801:** 800 und 810

Nachbarhunderter einer Zahl sind die dieser Zahl am nächsten gelegenen Vielfachen von Hundert. Bei Vielfachen von Hundert haben die Zehner- und die Einerstelle eine Null, weil sie ausschließlich zum Hunderter gebündelte Einer und Zehner enthalten: 200, 300, 400, 1.000 etc.

Die Bestimmung der Nachbarhunderter analog zur Bestimmung der Nachbarzehner kann auf folgende Weise erfolgen:

- Arbeit mit Wissen: Die Teilnehmer*innen kennen die Zahlreihe und Zahlzusammenhänge und wissen, wie die Hunderterzahlen vor und nach der betrachteten Zahl heißen.
- Eintragen/Hineindenken der Zahl in die Stellenwert-Tafel: 198 hat einen Hunderter, also 100, der nächste Hunderter ist dann bekannt:

H	Z	E
1	9	8

- am Zahlenstrahl Zahlen in Hunderterschritten eintragen und die Zahl, für die die Nachbarhunderter bestimmt werden soll, eintragen:

Für 198 würde der Zahlenstrahl wie folgt aussehen:

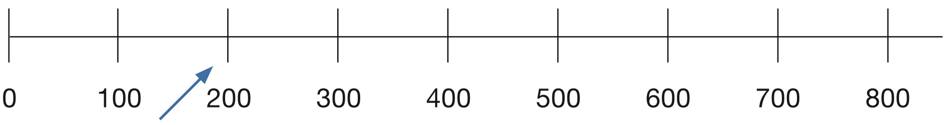


Abbildung 11.1-13 Nachbarhunderter für 198 am Zahlenstrahl

- Bezug zu den Betrachtungen zum Aufbau der Zahlen: Die Einer und Zehner wegdenken, ergibt den unteren Nachbarhunderter. Ein Hunderter mehr ergibt den oberen Nachbarhunderter. Auch die Einer und Zehner zum nächsten Hunderter zu ergänzen ergibt den oberen Nachbarhunderter.

Auch für Vielfache von Hundert wie 200, 300, 400 kann die Nennung der Nachbarhunderter manchen Teilnehmer*innen Schwierigkeiten bereiten. Es könnte ja aus Sicht einer Person sein, dass eine Zahl ihr eigener Nachbarhunderter ist, dass also der Nachbarhunderter von 200 die Zahl 200 selbst ist – oder dass der Begriff Nachbarhunderter für Hunderterzahlen nicht bestimmt ist. Hier gilt wieder: Wenn die Nachbarhunderter „die am nächsten liegenden Vielfachen von Hundert oberhalb und unterhalb einer Zahl" sind, dann kann eben nicht die Zahl selbst gemeint sein, sondern der Nachbarhunderter muss oberhalb bzw. unterhalb der Zahl liegen. Die Vielfachen von Hundert sind von dieser Begriffsbildung nicht ausgenommen. Für sie sind die Abstände zu den Nachbarhundertern genau 100: Die Nachbarhunderter von 200 sind die 100 und die 300, von 300 sind die Nachbarhunderter 200 und 400 usw.

Zur Übung fragt die Kursleitung die Teilnehmer*innen zu verschiedenen Zahlen nach deren Nachbarhundertern:

Welche sind die Nachbarhunderter zu folgenden Zahlen?
97 122 230 399 900 10

Die richtigen Antworten sind:
- **für 97:** 0 und 100
- **für 122:** 100 und 200
- **für 230:** 200 und 300
- **für 399:** 300 und 400
- **für 900:** 800 und 1.000
- **für 10:** 0 und 100

11.1.4 Kursgespräch – Aufbau und Struktur eines Tausenders

Didaktische Ziele
- Erweiterung der Stellenwerttabelle auf die Hunderter- und Tausenderstelle (mit Bündelungen)
- Betrachtung der Zahlen bis 1.000 anhand verschiedener Darstellungen (Mehrsystemblöcke und Zahlenstrahl) zur Festigung des Verständnisses

Bisher haben die Teilnehmer*innen das Stellenwertsystem bis 100 kennengelernt. Im nachfolgenden Beispiel werden 9 Zehner und 9 Einer in der Stellenwerttabelle dargestellt. Fügt man nun einen weiteren Einer hinzu, erhält man 10 Einer, die in der mittleren Tabelle in der oberen Reihe dargestellt sind.

Dann werden erst die 10 Einer zu einem weiteren Zehner und im zweiten Schritt 10 Zehner zu einem Hunderter gebündelt:

H	Z	E
	9	9

+1

H	Z	E
	9	9 + 1

H	Z	E
	9	10

H	Z	E
	9 + 1	0

H	Z	E
	10	0

H	Z	E
1	0	0

Anhand der Mehrsystemblöcke wird nochmals die Bündelungssystematik veranschaulicht:

Zu neun Einern kommt ein Einer hinzu, die zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt.
Nun sind es zehn Zehner.

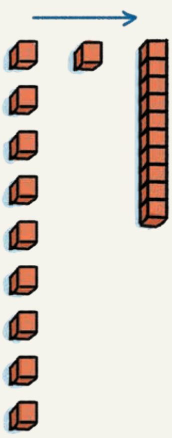


Abbildung 11.1-14 Die Bündelung eines Zehners aus zehn Einern.

Zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt.

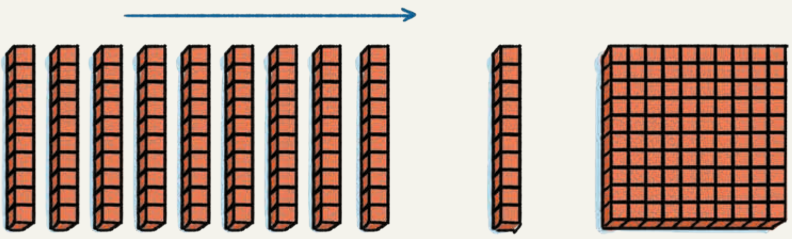


Abbildung 11.1-15 Bündelungssystematik mit Mehrsystemblöcken 10 E → 1 Z, 10 Z → 1 H

Nun wird die Bündelungsidee weitergedacht:

Einer Menge von 999 wird ein Einer hinzugefügt.

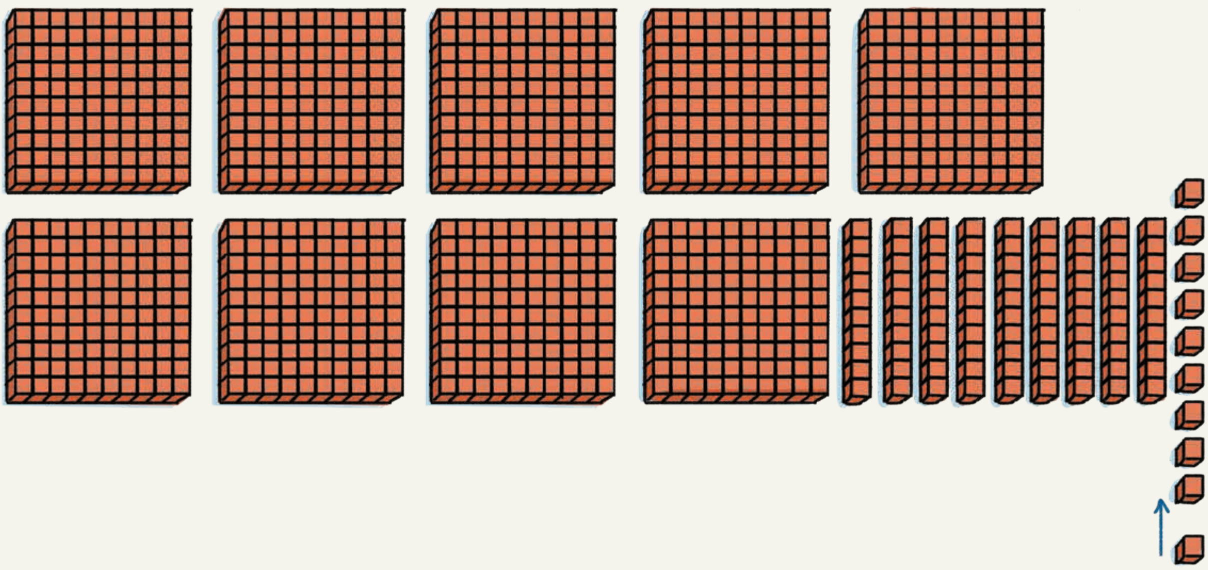


Abbildung 11.1-16 Zu 999 wird ein Einer hinzugefügt.

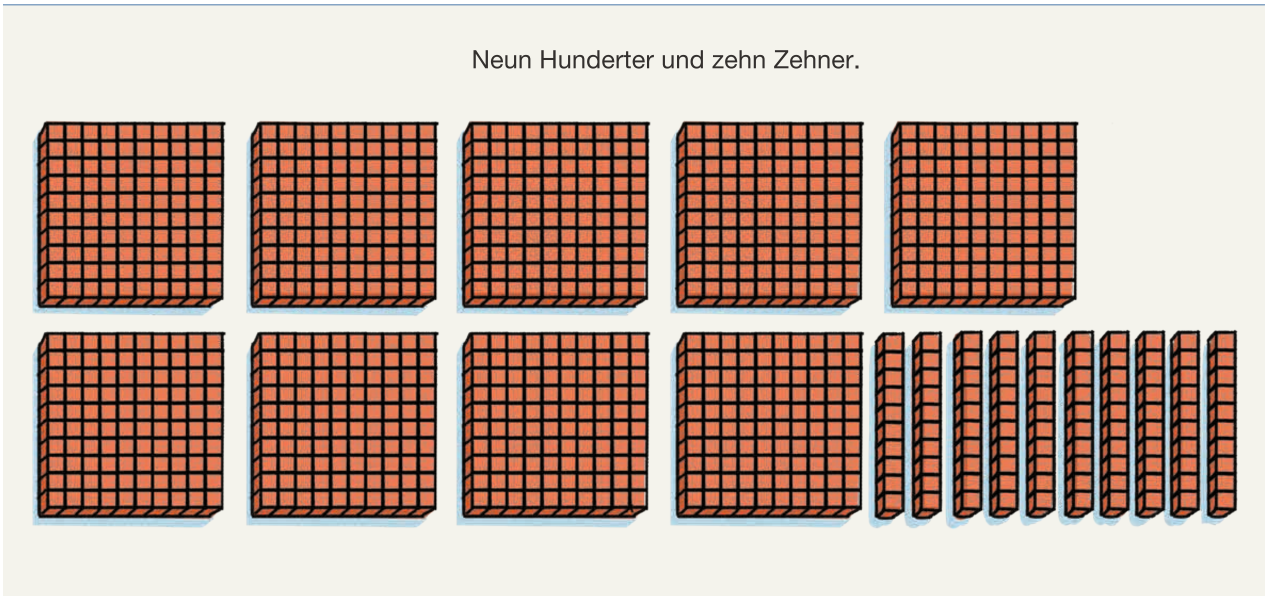


Abbildung 11.1-17 Neun Hunderter und zehn Zehner

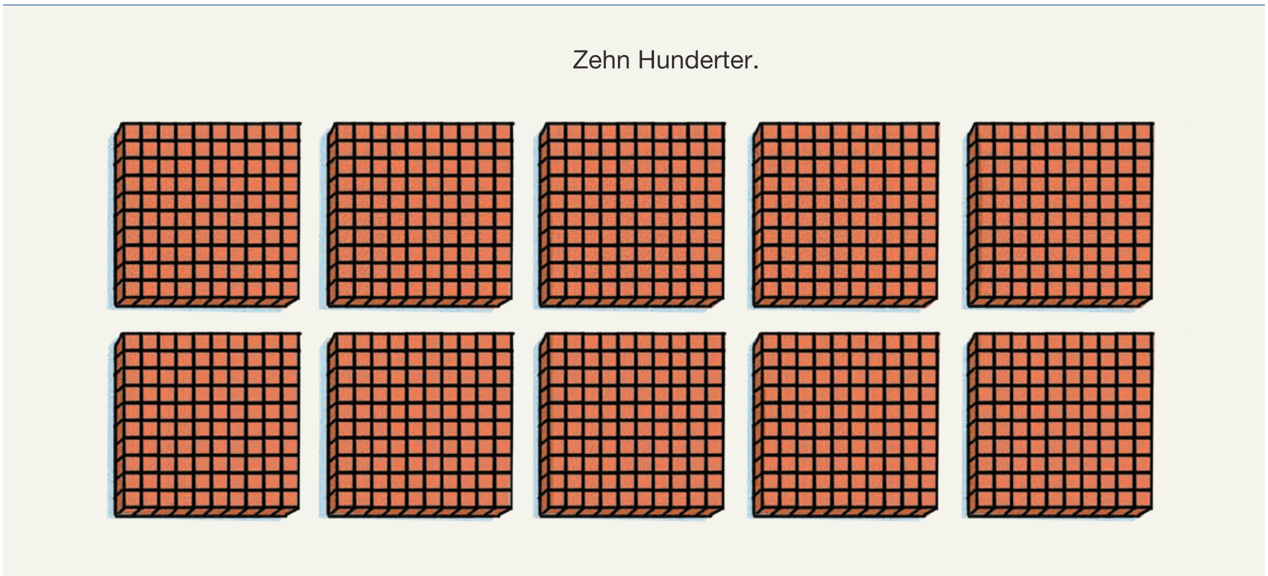


Abbildung 11.1-18 Neun Hunderter und zehn Zehner zu zehn Hundertern gebündelt

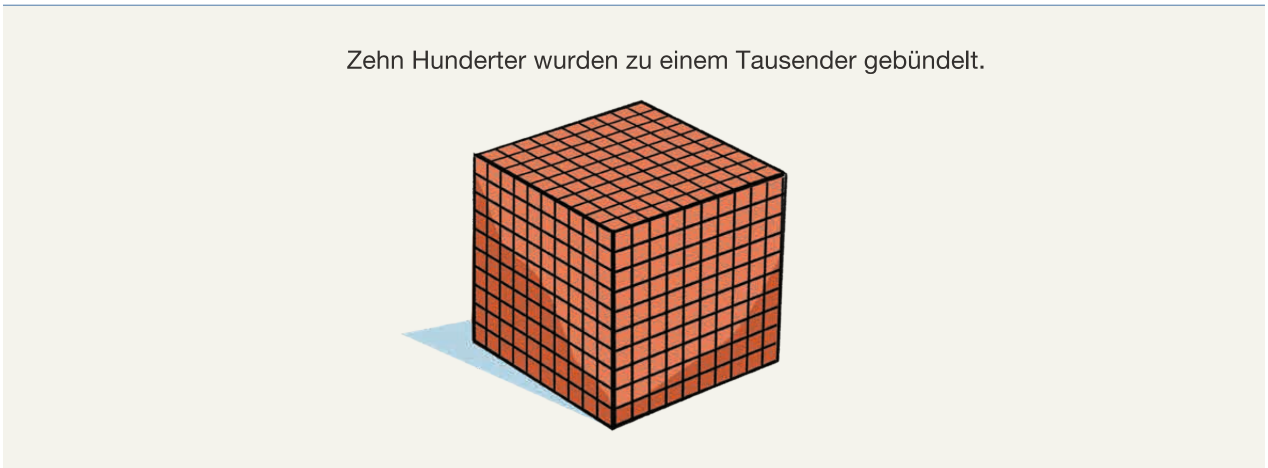


Abbildung 11.1-19 Zehn Hunderter wurden zu einem Tausender gebündelt.

Die obigen Schritte in der Stellenwerttabelle dargestellt:

T	H	Z	E
	9	9	9

+1

T	H	Z	E
	9	9	9 + 1

T	H	Z	E
	9	9	10

T	H	Z	E
	9	9 + 1	0

T	H	Z	E
	9	10	0

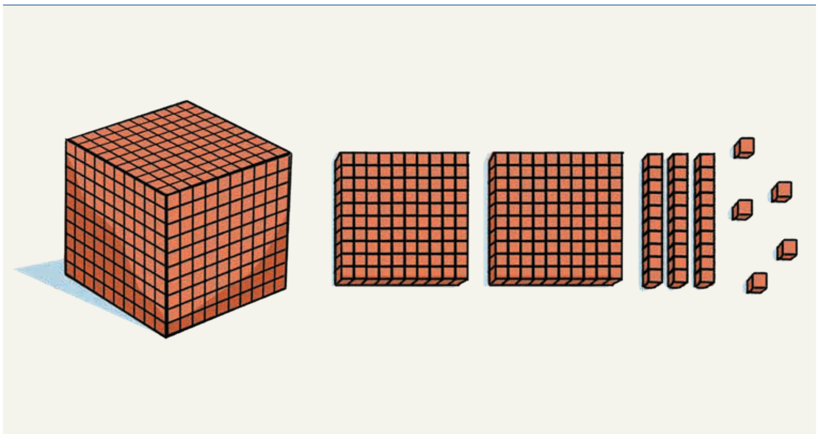
T	H	Z	E
	9 + 1	0	0

T	H	Z	E
	10	0	0

T	H	Z	E
1	0	0	0

Abbildung 11.1-20 Schrittweise Bündelung von 999 + 1 in Stellenwerttabellen

Vierstellige Zahlen werden dann analog zum Zahlbereich bis 100 wie folgt abgebildet:



T	H	Z	E
1	2	3	5

Abbildung 11.1-21 Die Zahl 1235 dargestellt mit 1 Tausender, 2 Hundertern, 3 Zehnern und 5 Einern.

Für Zahlen größer als Tausend setzt sich die Darstellung mit Mehrsystemblöcken und in der Stellenwerttabelle analog fort. Beispielhaft ist in Abbildung 21 die Zahl 1235 dargestellt mit 1 Tausender, 2 Hundertern, 3 Zehnern und 5 Einern.

Der *Zahlenstrahl* kann zur Darstellung insbesondere von Nachbarzehnern, Nachbarhundertern usw. sowie für das Runden ein probates Mittel sein, wenn die Zahlen entsprechend in gleichen Abständen und mit analog gleichgroßen Abständen der Skalierung notiert werden.

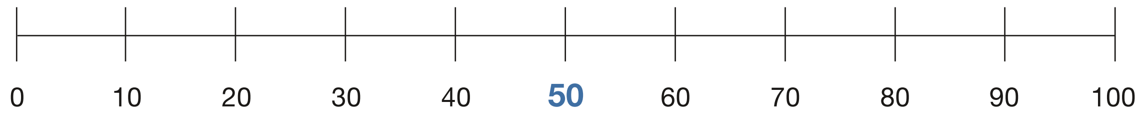
Am *offenen Zahlenstrahl* bzw. *Rechenstrich* ist das schrittweise Rechnen bei Addition und Subtraktion gut nachzuvollziehen, deshalb wird dieser intensiver betrachtet.

An dieser Stelle sei jedoch darauf hingewiesen, dass für die Betrachtung von Mengen ein Zahlenstrahl ungeeignet ist, da er eher den ordinalen Aspekt von Zahlen betont, also die Ordnung der Zahlen mit Bezug zu ihrer Größe. Damit ist gemeint, dass die Zahlen von links nach rechts größer werden.

Es ist möglich, dass die Teilnehmer*innen noch aus Schulzeiten den Zahlenstrahl oder den leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich) als Hilfsmittel beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben verwenden. Problematisch bei der Nutzung des strukturierten oder gar durchnummerierten Zahlenstrahls ist, dass er oft lediglich als Zählhilfe verwendet wurde bzw. wird. Davon sollen sich die Teilnehmer*innen emanzipieren hin zum Rechnen unter Nutzung von sinnvollen Zerlegungen der Zahlen.

Für die nachfolgenden Erläuterungen des Zahlaufbaus der Zahlen bis 1.000 werden die Abstände in Analogie zu den Zahlunterschieden jeweils gleichgroß gewählt.

Die Teilnehmer*innen werden nun an den Zahlenstrahl bis 100 erinnert. Es wird ein Zahlenstrahl via Projektor an der Wand oder via Tafelbild gezeigt:



Die Zahl 50 liegt genau in der Mitte zwischen 0 und 100.

Dass 50 die Hälfte von 100 ist, lässt sich an einer Hundertplatte erkennen, wenn man jeweils 5 Reihen à 10 Zehner oder 10 Spalten à 5 Einer betrachtet:

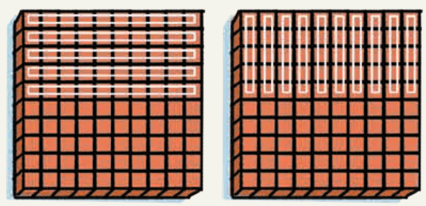
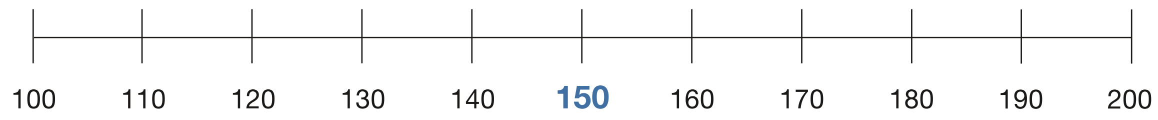
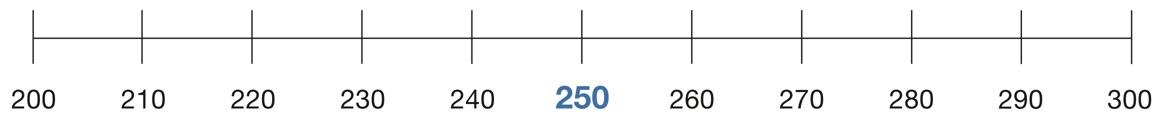


Abbildung 11.1-22 Die Hälfte von 100 bei der Hunderterplatte



Die Zahl in der Mitte dieses Zahlenstrahls ist die Zahl 150, der Abstand von hier bis zur 100 beträgt ebenso 50 wie der Abstand zur 200.

Dann wird der Aufbau des nächsten Hunderters von 200 bis 300 verglichen:



Auf diesem Zahlenstrahl ist die Zahl 250 in der Mitte, der Abstand von hier bis zur 200 beträgt ebenso 50 wie der Abstand zur 300. Fragen an die Teilnehmer*innen hierzu können sein:

Sehen die Zahlenstrahlen der weiteren Hunderter genauso aus?
Warum ist das so?

Hier soll die Erkenntnis gewonnen werden, dass jeder Hunderter gleich aufgebaut ist.

In beiden Fällen als auch im Zahlbereich von 0 bis 100 hat der Wert in der Mitte fünf Zehner, weil der ganze Abstand ein Hunderter ist, welcher in 10 Zehner unterteilt und in fünf Zehner halbiert werden kann. Der Hunderter-Wert verändert sich je nach Auswahl des Zahlbereichs.

Die analoge Betrachtung kann an den Mehrsystemblöcken vorgenommen werden: Die Tatsache, dass ein Hunderter in 10 Zehner entbündelt wird, um halbiert werden zu können, ändert sich nicht, wenn noch beliebig viele Hunderter hinzukommen.

11.1.5 Kursgespräch: Zusammenführung Nachbarzehner und Nachbarhunderter

Didaktisches Ziel
zur Vertiefung der Nachbarzahlen und zur Vorbereitung des Rundens werden Nachbarzehner UND Nachbarhunderter einer dreistelligen Zahl genannt

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen, ob sie für dreistellige Zahlen die Nachbarzehner und -hunderter benennen können, und nennt folgende Beispielzahlen:

BEISPIELE
105, 130, 298, 350, 475, 500, 726

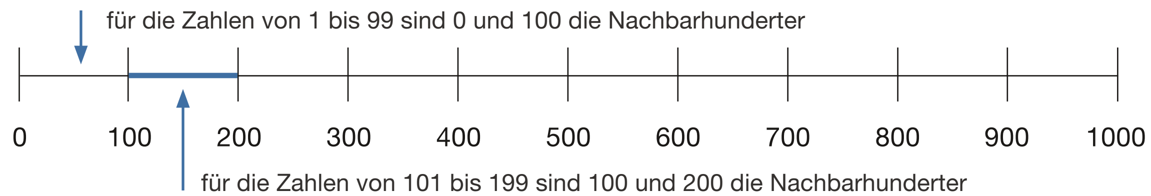
Die Teilnehmer*innen sollen zur Wiederholung erst die Vorgänger und Nachfolger nennen und dann die Nachbarzehner.

Finden Sie die Nachbarhunderter einer Zahl! Wie machen Sie das?

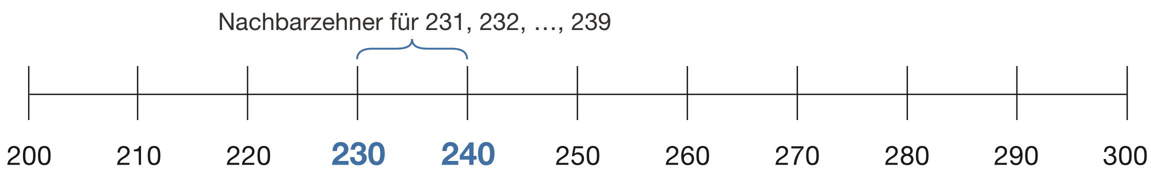
Findet jemand die Nachbarhunderter für die Zahlen oben?

Wie heißen die Nachbarhunderter für 200, 400, 700 und 900?

Am Zahlenstrahl lassen sich die Nachbarzahlen in gleicher Weise gut identifizieren. Für die Bestimmung von Nachbarhundertern empfiehlt es sich, die Zahlenabstände in Hunderterschritten zu notieren:



Für die Bestimmung von Nachbarzehnern dreistelliger Zahlen am Zahlenstrahl bedarf es einer Darstellung in Zehnerschritten:



Die Kursleitung kann nun **Aufgabenblatt 11.1 b** den Teilnehmer*innen aushändigen und dieses wie unten erläutert mit ihnen besprechen. Wenn gewünscht, können die Teilnehmer*innen die Aufgaben auch zu Hause lösen. Die Bearbeitungszeit beträgt ca. 20–25 Minuten.

11.1.6 Einzelarbeit Aufgabenblatt 11.1 b – Zahlen ordnen und Nachbarn finden

Didaktisches Ziel
gemischte Übungen zur Festigung der Orientierung im Zahlenraum bis 1.000: Nachbarzehner und -hunderter nennen, Zahlen vergleichen und der Größe nach ordnen, Zahlen am Zahlenstrahl verorten

Bevor in praktischen Anwendungen und Übungen das Bündeln von Stellenwerten vertieft wird, sollen/können die Teilnehmer*innen Übungsaufgaben als Wiederholung zur Ordnung und Strukturierung des Zahlbereichs bis 1.000 machen. Die Kursleitung verteilt **Aufgabenblatt 11.1b**. Die Bearbeitungszeit beträgt ca. 20–25 Minuten.

AUFGABENBLATT 11.1 b

Um sicherzustellen, dass alle Teilnehmer*innen die Aufgaben lösen können, werden von jeder Aufgabe ein bis zwei Teilaufgaben in der Gruppe besprochen. Dazu einige didaktische Hinweise zu den jeweils ersten Teilaufgaben:

Aufgabe 1: Schreiben Sie die Nachbarzehner auf: 299 …

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen, ob sie sich an das Bestimmen der Nachbarzehner für dreistellige Zahlen erinnern und ob sie diese Aufgabe lösen können. Als Hilfestellung verweist die Kursleitung auf die möglichen Wege zur Bestimmung von Nachbarzahlen und wählt hier die Notation eines Zahlbereichs, in dem die 299 liegt, z. B. 250 bis 300 oder 200 bis 300 wie folgt:

250 260 270 280 290 300 oder
200 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300.

Die Darstellung kann auch senkrecht erfolgen, das kann den Teilnehmer*innen überlassen werden. Dann sollen sie sagen, zwischen welchen Zehnerzahlen die 299 einzuordnen ist.

Die Teilnehmer*innen werden an dieser Stelle befragt, nach welchen Kriterien sie den Zahlbereich wählen würden: Eher kleiner wie in der ersten Zeile oder möglichst groß wie in der zweiten Zeile? Oder noch größer/kleiner? Sie sollen versuchen, dies zu begründen.

Ziel ist es, den Gedanken, dass Nachbarzehner die nächsten Vielfachen von Zehn oberhalb und unterhalb einer Zahl meinen, so weit zu denken, dass die Teilnehmer*innen diesen direkt bestimmen können, indem sie von 299 die Einer „wegdenken“, um den unteren Nachbarzehner zu erhalten (299 – 9 = 290), und die Einer zum nächsten Zehner zu ergänzen, um den oberen Nachbarzehner zu erhalten (299 + 1 = 300).

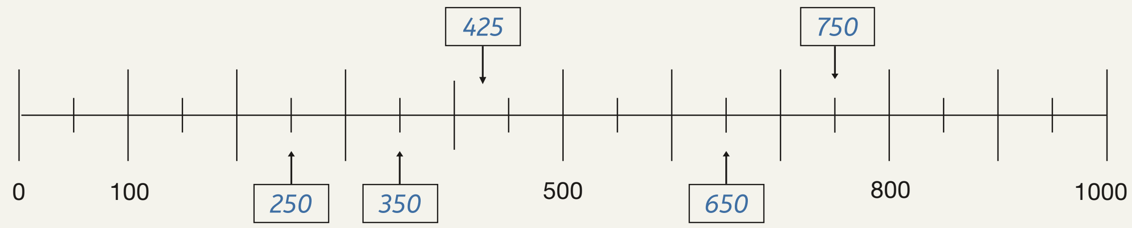
Aufgabe 2: Schreiben Sie die Nachbarhunderter auf: 299 …

Die Teilnehmer*innen werden gefragt, wie sie hier vorgehen würden und wie sie in Anlehnung an Aufgabe 1 vorgehen. Falls erforderlich, gibt die Kursleitung den Hinweis, die Zehner und Einer „wegzudenken“ (299 – 99 = 200), um den nächsten unteren Hunderter zu erhalten, und analog die Einer und Zehner zum nächsten Hunderter zu ergänzen (299 + 1 = 300).

Aufgabe 5: Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

Die Kursleitung wählt eine der gesuchten Zahlen aus und fragt die Teilnehmer*innen nach ihrer Vorgehensweise.

Welche Zahlen helfen, um die gesuchte Zahl leichter zu finden? Bei Aufgabe 5 kann man das gleich machen.



Aufgabe 6: Schreiben Sie die Zahlen in der richtigen Reihenfolge auf.

a) Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl und verwenden Sie das „<"-Zeichen:

965, 343, 589, 434, 353, 109, 980, 809, 201, 102

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen, wie sie vorgehen würden und worauf sie achten müssen, um die oben genannten Zahlen in die richtige Reihenfolge zu bringen. Falls die Teilnehmer*innen hier noch Schwierigkeiten haben, verweist die Kursleitung auf die stellenweise Darstellung von Zahlen:

965 = 9H 6Z 5E und 343 = 3H 4Z 3E. Die Zahl mit mehr Hundertern (erste Stelle von links) ist größer. Hier müsste es heißen: 965 > 343. Wenn man mit der kleinsten Zahl beginnt, wäre die richtige Schreibweise: 343 < 965.

Die Kursleitung lässt die Teilnehmer*innen die übrigen Aufgaben lesen und fragt, ob es dazu noch Klärungsbedarf gibt. Gegebenenfalls sind dazu noch Beispiele in der Gruppe zu lösen. Die Aufgaben werden anschließend in Einzelarbeit gelöst. Die Kursleitung steht für Fragen zur Verfügung. Den in der Auswertung des Aufgabenblattes entstehenden Diskussionen oder geäußerten Antworten entnimmt die Kursleitung, ob es zum Thema „Aufbau der Hunderter und des Tausenders" Unsicherheiten oder Verständnisprobleme gibt. Dann führt die Kursleitung ein Unterrichtsgespräch, in dem die Teilnehmer*innen miteinander über die Lösungswege und Darstellungsvarianten wie Zahlenstrahl, Tausenderbuch und Stellenwerttabelle diskutieren.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen haben eine mit bloßen Augen nicht erfassbare Menge mit Hilfe einer Bündelung von Einern zu Zehnern und zu Hundertern ermittelt und haben sich ein Orientierungsvermögen im Zahlbereich bis 1.000 angeeignet. Dabei dienten verschiedene Materialien wie Mehrsystemblöcke, Stellenwerttabelle, Tausenderbuch bzw. Tausendertafel und Zahlenstrahl der Mengen- bzw. Zahldarstellung. Beispielzahlen wurden in den Materialien verortet und die Teilnehmer*innen haben den Begriff des Nachbarzehners wiederholt und den des Nachbarhunderters gelernt.

Damit sind die Vielfachen von Zehn bzw. die Vielfachen von Hundert gemeint, die dieser Zahl am nächsten sind.

Nachbarzahlen sind im Weiteren hilfreich für das Runden sowie das Überschlagen, denn hier bezieht man sich auf Nachbarzehner und Nachbarhunderter. Sie werden auch beim Rechnen mit mehrstelligen Zahlen helfen, weil man sie dort als Bezugspunkte des schrittweisen Rechnens nutzt.

vhs-Lernportal
vhs.link/GK9XJx

11.2 Konstruktion des Dezimalsystems, Stellenwertumwandlungen

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen vertiefen die Inhalte aus Kapitel 11.1 und ihr Verständnis der Bündelungssystematik im Zahlbereich bis 1.000. Dort haben sie den Aufbau und die Strukturen der Zahlen bis 1.000 mittels Darstellungen wie Stellenwerttabelle, Mehrsystemblöcken, Tausenderbuch und Tausenderfeld sowie Zahlenstrahl betrachtet. Des Weiteren haben die Teilnehmer*innen Nachbarzehner und -hunderter für Beispielzahlen ermittelt.

Eine wesentliche Erkenntnis für die Zahlen bis 1.000 ist, dass die einzelnen Hunderter immer gleich aufgebaut sind, also 101, 102, 103, …, 199 und 201, 202, 203, …, 299 usw.

Nach einer theoretischen Vermittlung zur Konstruktion des Dezimalsystems vertiefen die Teilnehmer*innen in praktischen Übungen die wesentlichen Aspekte der Bündelung und Entbündelung verschiedener Stellenwerte. Dabei werden unterschiedlich vorteilhafte Darstellungsweisen dreistelliger Zahlen verwendet, um die praktischen Vorteile der Bündelungssystematik beim Erfassen großer Mengen im Dezimalsystem hervorzuheben.

11.2.1 Kursgespräch – Zahlen in verschiedenen Stellenwerten darstellen

Didaktisches Ziel
auf Grundlage des fortschreitenden Bündelns werden Zahlen in verschiedenen Stellenwerten dargestellt, z. B. 1 T = 10 H = 100 Z = 1.000 E

Im Zahlbereich bis 100 haben die Teilnehmer*innen die Bündelung von 10 Einern zu einem Zehner und von 10 Zehnern zu einem Hunderter kennengelernt. Die nächsthöhere Bündelungsstufe wird immer dann erreicht, wenn genau 10 Bündel der vorangegangenen Stufe vorhanden sind:

10 E = 1 Z 10 Z = 1 H

In der Stellenwerttabelle stellt sich die Bündelung wie in Abbildung 11.2-1 dar. Diese lässt sich im Dezimalsystem beliebig fortsetzen, indem immer 10 Einheiten einer Stufe zu einem neuen Bündel der nächsthöheren Bündelungsstufe zusammengefasst werden:

Milliarden			Millionen			Tausend					
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
											10
										1	0
										10	0
									1	0	0
									10	0	0
								1	0	0	0
								10	0	0	0
							1	0	0	0	0
							10	0	0	0	0
					usw.	1	0	0	0	0	0

Abbildung 11.2-1 Stellenwerttabelle – immer Zehn werden gebündelt

Hinter der Bündelung steht ein theoretisches Konstrukt, um das Erfassen großer Mengen zu vereinfachen. Ein Tausender, also 1.000, kann auf vielfältige andere Art und Weise gedacht und dargestellt werden:

- als 1.000 Einer
- als 100 Zehner
- als 10 Hunderter
- als 1 Tausender
- als 560 Einer und 44 Zehner
- als 8 Hunderter, 8 Zehner und 120 Einer
- als 9 Hunderter, 3 Zehner und 70 Einer…,

um nur einige Beispiele zu nennen, die in der folgenden Stellenwerttabelle dargestellt sind.

Tausender					
H	Z	E	H	Z	E
					1000
				100	
			10		
		1			
H	Z	E	H	Z	E
				44	560
			8	8	120
			9	3	70

Abbildung 11.2-2 Verschiedene Darstellungen der Zahl 1.000 in der Stellenwerttabelle

Die Kursleitung stellt den Teilnehmer*innen verschiedene Fragen zur Abbildung:

> *Welche Darstellung der Zahl 1.000 finden Sie am besten/schlechtesten? Begründen Sie Ihre Meinung.*
>
> *Ist eine der Darstellungen falsch oder unpraktisch? Begründen Sie Ihre Meinung.*

Wenn jemand die ersten drei oder die letzten drei Darstellungen als falsch bezeichnet, wird den Teilnehmer*innen nochmals erläutert, dass es bei der Bündelung um eine Vereinfachung geht.

1.000 ist die Summe aus 10 Hundertern ebenso wie aus 100 Zehnern oder 1.000 Einern. Die Kursleitung schreibt die Summen ggf. an die Tafel oder lässt die Teilnehmer*innen die einzelnen Darstellungen an der Tafel notieren:

$$1.000 = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{1.000\text{-mal die } 1}$$

oder

$$1.000 = \underbrace{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \ldots + 10}_{100\text{-mal die } 10}$$

oder

$$1.000 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{70\text{-mal die } 1}$$

und fragt die Teilnehmer*innen, was daran unvorteilhaft sei.

Diese Diskussion kann zu der Erkenntnis führen, dass unser Stellenwertsystem eine *eindeutige* Zahldarstellung absichert: Die genannten vielen verschiedenen Zahldarstellungen sind zwar alle korrekt, wenn wir die Zahlen hingegen immer auf diese Weise darstellen würden, dann müssten wir immer unter großen Mühen herausfinden, welche Menge denn nun eigentlich durch die Zahldarstellung beschrieben ist. Nur die Festlegung, dass immer auf jedem Stellenwert nur eine Ziffer steht, ermöglicht uns die Herausbildung eines Zahlgefühls und die Fähigkeit, Zahlen bzgl. ihrer Mächtigkeit zu vergleichen: Wir sehen sofort, dass 875 größer ist als 872. Wenn wir die Zahl 81 Z + 65 E mit der Zahl 2 H + 42 Z + 252 E vergleichen wollten, dann wäre das deutlich aufwendiger. In der Festlegung der eindeutigen Zahldarstellung liegt also eine erhebliche kulturelle Leistung.

11.2.2 Kursgespräch – Kanonische und nicht-kanonische Zahlzerlegungen

Didaktische Ziele
- stellenweises Zerlegen von Zahlen festigen
- andere mögliche Zahlzerlegungen erkunden (nicht kanonische Zahldarstellungen werden unter 11.3 noch ausführlich behandelt)

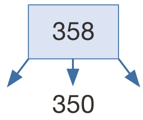
Zum besseren Verständnis wird nachfolgend zwischen der *kanonischen* und der *nicht-kanonischen* Darstellung von Zahlen unterschieden. Der Blick auf diese Unterscheidung hat zum Ziel, bei den Teilnehmer*innen das Verständnis für die verschiedenen Möglichkeiten der Zahlzerlegungen sowie für die Vorteilhaftigkeit der maximalen Bündelung zu verbessern. Kanonisch dargestellte Zahlen lassen den Wert einer Zahl leicht erkennen.

Die Zahl 358 lässt sich neben der stellenweisen Zerlegung (3 Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer) in die Teile

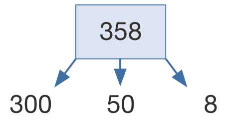
- 35 Zehner und 8 Einer, also in 350 und 8 oder in
- 3 Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer, also in 300 und 50 und 8 oder in
- 3 Hunderter, 4 Zehner und 18 Einer, also in 300 und 40 und 18 oder in
- 2 Hunderter, 12 Zehner, 38 Einer usw.

zerlegen.

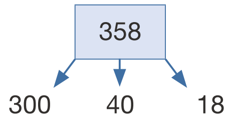
Die Darstellungen der Zahlzerlegungen und in der Stellenwerttabelle würden dann wie folgt aussehen:



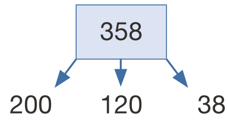
H	Z	E
	35	8



H	Z	E
3	5	8



H	Z	E
3	4	18



H	Z	E
2	12	38

Abbildung 11.2-3 Zahlzerlegungen und Stellenwerttabelle für die Zahl 358

Das Zerlegen dreistelliger Zahlen wird ausführlicher in Kapitel 11.3 betrachtet.

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Im Dezimalsystem werden alle Werte auf die Grundzahl 10 bezogen. Es gibt zehn verschiedene Ziffern: 0, 1, 2, …, 9 und mit diesen lassen sich alle Zahlen darstellen. Je nachdem, an welcher Stelle eine Ziffer in einer mehrstelligen Zahl steht, variiert der Wert dieser Ziffer. Die Stellenwerttabelle für die Zahl 1235 sieht dann wie folgt aus:

…	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
…	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	1	2	3	5

11.2.3 Kursgespräch – Zahldarstellungen im Stellenwertsystem

Didaktisches Ziel
stellenweises Zerlegen von Zahlen mit verschiedenem Material darstellen (Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke)

Sie haben jetzt (wieder einmal) gesehen, dass jede Zahl aus anderen Zahlen besteht. Diese Zerlegungen können unterschiedlich sein. Sie haben in Kapitel 9 bereits gelernt, dass unsere Schreibweise von Zahlen genau eine dieser möglichen Zerlegungen zeigt. Nämlich die Zerlegung in Zehnerbündel. Diese Idee brauchen wir nun für den Zahlbereich bis 1000. Wir schauen uns das zunächst am Beispiel der Zahl 128 an.

Für die Zahl 128 sieht die eindeutige Darstellung mittels Mehrsystemblöcken und in der Stellenwerttabelle wie folgt aus:

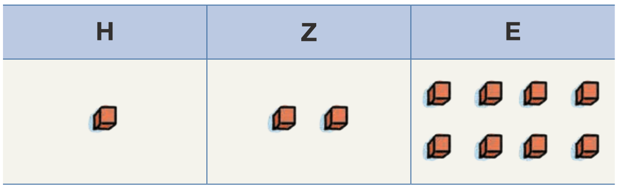


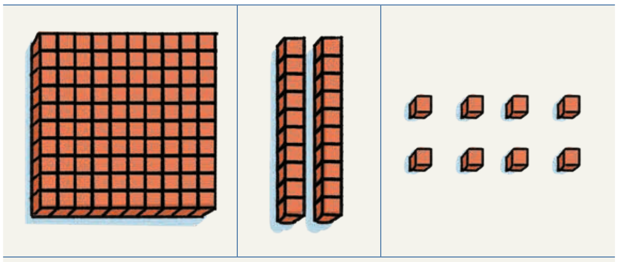
Abbildung 11.2-4 Darstellung 128 mit Mehrsystemmaterial

oder

H	Z	E
1	2	8

Die Eins an erster Stelle von links gibt die Anzahl der Hunderter an, die zwei an der zweiten Stelle von links steht für die Anzahl der Zehner, und die dritte Stelle von links lässt erkennen, dass in der oberen Darstellung acht Einer ungebündelt vorliegen.

Daraus ergibt sich die offensichtliche Additionsaufgabe:



100 + 20 + 8 = 128

Abbildung 11.2-5 Darstellung von 128 mit Mehrsystemblöcken

11.2.4 Mathekonferenz – Stellenwerte umwandeln

Didaktisches Ziel
kanonische und nicht-kanonische Zahlzerlegungen mit unterschiedlichen Darstellungsvarianten festigen/vertiefen (als Zahlwort, als Zahl in Ziffernschreibweise, als Addition der Stellenwerte, mit Mehrsystemblöcke oder in der Stellenwerttabelle)

Die Teilnehmer*innen haben den Aufbau der Zahlen bis 1.000 und des Stellenwertsystems vermittelt bekommen. Nun sollen die Teilnehmer*innen ihr Wissen praktisch vertiefen und mittels Übungen den Umgang mit verschiedenen Darstellungen der Zahlen bis 1.000 sowie mit der Bündelung routinisieren.

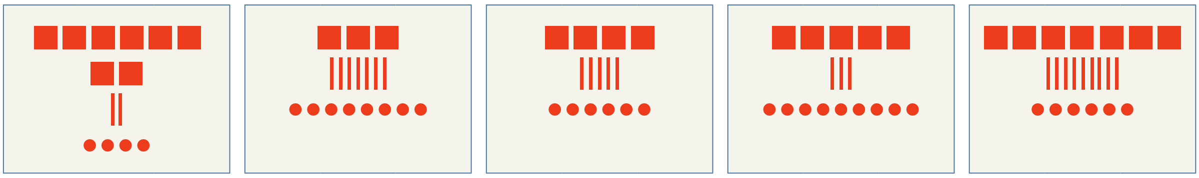
Die Übungen sind in zwei Varianten mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad unterteilt. In der ersten Variante erfolgen die Darstellungen mit kanonischer Bündelung. Wenn die Kursleitung den Eindruck hat, dass die Teilnehmer*innen damit sicher umgehen können, können die Übungen der zweiten Variante durchgeführt werden. Hier sind die Bündelungen keineswegs kanonisch, sodass ein weiterer Lernaspekt entsteht: Die Teilnehmer*innen sollen selbst so weit bündeln, dass sie schließlich in der Stellenwertdarstellung die Zahlen leicht erkennen.

Alternativ kann mit der zweiten Variante begonnen und ggf. bei auftretenden Schwierigkeiten die erste Variante vorgezogen werden.

1. VARIANTE: KANONISCHE BÜNDELUNG

Die Kursleitung befestigt an der Tafel nachfolgende Darstellungen dreistelliger Zahlen (jeweils als einzelne Karten, die an der Tafel befestigt und verschoben werden können, z. B. mit Magneten oder Nadeln an der Stellwand; siehe Material und Kopiervorlage) als Darstellung mittels Zahlwort, Mehrsystemblöcken, Zahl, Addition und als Zerlegung in der Stellenwerttabelle:

dreihundert-achtundsiebzig	fünfhundert-neununddreißig	siebenhundert-sechsundneunzig	achhundert-vierundzwanzig	vierhundert-sechsundfünfzig



796	**824**	**539**	**456**	**378**
500 + 30 + 9	**400 + 50 + 6**	**300 + 70 + 8**	**700 + 90 + 6**	**800 + 20 + 4**

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
4	5	6	7	9	6	3	7	8	8	2	4	5	3	9

Abbildung 11.2-6 Tafelbilder Stellenwertumwandlung mit kanonischer Bündelung (1. Variante)

Die Teilnehmer*innen sollen gemeinsam die richtigen Zuordnungen finden und die entsprechenden Karten jeweils untereinander spaltenweise an der Tafel anordnen.

Anschließend bietet es sich an, dass die Teilnehmer*innen die an der Tafel befindlichen Zahlen der Größe nach ordnen. Beginnend mit der kleinsten Zahl ist hier das Zeichen „<“ zu verwenden, beginnend mit der größten Zahl entsprechend das Zeichen „>“. Die Teilnehmer*innen notieren beide Varianten.

Nun verorten die Teilnehmer*innen die Zahlen am Zahlenstrahl und nennen schließlich die jeweiligen Nachbarzehner sowie -hunderter. Die Teilnehmer*innen sollen ihre Vorgehensweisen einander vermitteln und miteinander in Diskussion und Austausch treten, welcher der geschickteste Weg ist und wie man auf den einzelnen Darstellungsebenen erkennt, welche Zahl kleiner und welche größer ist.

Die Kursleitung präsentiert schließlich die Lösungen, falls erforderlich:

Ordnung der Größe nach, die kleinste Zahl zuerst: 378 < 456 < 539 < 796 < 824

wiederholend

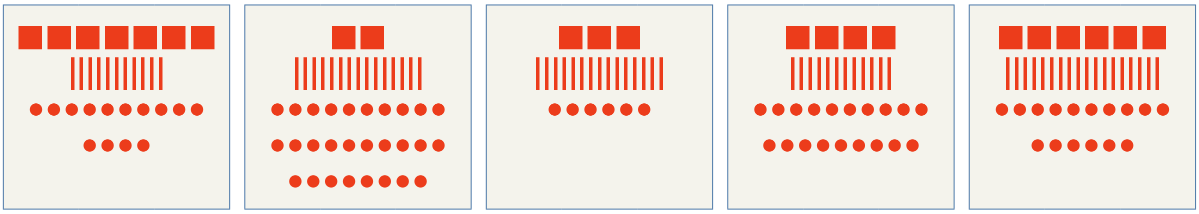
Ordnung der Größe nach, die kleinste Zahl zuerst: 824 > 796 > 539 > 456 > 378

Nachbarzehner		**Nachbarhunderter**	
von 378:	370 und 380	von 378:	300 und 400
von 456:	450 und 460	von 456:	400 und 500
von 539:	530 und 540	von 539:	500 und 600
von 796:	790 und 800	von 796:	700 und 800
von 824:	820 und 830	von 824:	800 und 900

2. VARIANTE: NICHT-KANONISCHE BÜNDELUNG

Die Kursleitung befestigt an der Tafel nachfolgende Darstellungen dreistelliger Zahlen (jeweils als einzelne Karten, die an der Tafel befestigt und verschoben werden können, z. B. mit Magnet oder Nadeln an der Stellwand; siehe Material und Kopiervorlage), als Darstellung mittels Zahlwort, Mehrsystemblöcken, Zahl, Addition und als Zerlegung in der Stellenwerttabelle:

dreihundert-achtundsiebzig	fünfhundert-neununddreißig	siebenhundert-sechsundneunzig	achthundert-vierundzwanzig	vierhundert-sechsundfünfzig



796	**824**	**539**	**456**	**378**
400 + 120 + 19	**300 + 150 + 6**	**200 + 150 + 28**	**600 + 180 + 16**	**700 + 110 + 14**

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
0	32	136	5	27	26	3	20	324	2	0	178	4	12	19

Abbildung 11.2-7 Tafelbilder Stellenwertumwandlung mit nicht-kanonischer Bündelung, 2. Variante

Die Teilnehmer*innen sollen gemeinsam die richtigen Zuordnungen finden und die entsprechenden Karten jeweils untereinander spaltenweise an der Tafel anordnen.

Nicht-kanonisch gebündelt:

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	Z	H	Z	E	H	Z	Z
	32	136	5	27	26	3	20	26	2		178		43	109

Kanonisch gebündelt:

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	Z	H	Z	Z	H	Z	Z
4	5	6	7	9	6	8	2	4	3	7	8	5	3	9

Betrachtet man für obige Zahlen die Zahlzerlegungen gemäß der nicht-kanonische Bündelung im Vergleich zur kanonischen Bündelung, ergibt sich folgendes Bild:

Zahlzerlegung bei nicht-kanonischer Bündelung								Zahlzerlegung bei kanonischer Bündelung							
H	Z	E		Zahl		Zerlegung		H	Z	E		Zahl		Zerlegung	
	32	136		456		320, 136		4	5	6		456		400, 50, 6	
5	27	26		796		500, 270, 26		7	9	6		796		700, 90, 6	
3	20	324		824		300, 200, 324		8	2	4		824		800, 20, 4	
2		178		378		200, 178		3	7	8		378		300, 70, 8	
	43	109		539		430, 109		5	3	9		359		500, 30, 9	

Abbildung 11.2-8 Zahlzerlegungen dreistelliger Zahlen – Nicht-kanonische Bündelung (links) im Vergleich zur kanonischen Bündelung (rechts)

11.2.5 Kursgespräch und Einzelarbeit – Stellenwerte umwandeln, Zahlwörter schreiben

Didaktische Ziele

- nicht-kanonische Zahldarstellungen in kanonische Zahldarstellungen umwandeln und als Zahl schreiben
- Zahlen als Zahlwort schreiben
- erkunden, in welchen Aufgabentypen Entbündelungen erforderlich sind

Die Kursleitung händigt den Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 11.2 a** aus. Ziel ist es, die Umwandlung von Stellenwerten und das Verständnis der Bündelung zu vertiefen. Ferner sollen das Entbündeln und das Verständnis der unterschiedlichen Zahldarstellungen routinisiert werden. Die Bearbeitungszeit beträgt ca. 20–30 Minuten.

Die Kursleitung erläutert die Vorgehensweise:

AUFGABENBLATT 11.2 a

Wandeln Sie in andere Stellenwerte um. Schreiben Sie das Ergebnis als Zahl. Ordnen Sie nach dem Wert der Stellen, also H Z E.

Beispiele:

18 E + 21 E + 10 Z = *1 Z 8 E + 2 Z 1 E + 1 H = 1 H 3 Z 9 E, Zahl: 139*

12 Z + 23 E + 71 Z = ______________________

22 Z + 2 H + 98 E = ______________________

44 E + 36 Z = ______________________

135 E + 2 H + 31 Z = ______________________

18 Einer enthalten 10 Einer und 8 Einer, die 10 Einer werden zu einem Zehner gebündelt, sodass aus 18 Einern dann 1 Zehner und 8 Einer werden. Analog werden aus 21 Einern dann 2 Zehner und 1 Einer und aus den 10 Zehnern ein Hunderter.

Hier bietet sich an, die Teilnehmer*innen mit Fragen zum Diskutieren anzuregen, etwa:

Warum rechnet man nicht 18 E + 21 E = 39 E und bündelt dann aus den 39 E die 3 Zehner mit einem Rest von 9 E?

Antwort: Ist möglich, aber der Rechenaufwand ist höher.

Was ist aus Ihrer Sicht einfacher?
18 E + 21 E oder 1 Z 8 E + 2 Z 1 E? Warum?

Kann man hier auch die Stellen vertauschen, z. B. 1 Z 8E + 2 Z 1 E = 1 Z + 2 Z + 8 E + 1E?
Wenn nein: Warum nicht? Wie sehen das die anderen?
Wenn ja: Warum geht das? Können Sie das erklären?

Hier weist die Kursleitung auf die Möglichkeit der Vertauschung der Summanden in Summen hin (siehe Kapitel 7 *Teile, Ganzes und Gleichungen)* und darauf, dass das Addieren von 1 + 2 (die Zehner) und 8 + 1 (die Einer) leichter ist als die Addition von 18 und 21 (Einern). Zudem empfiehlt sich hier die Thematisierung der Konvention, dass 1 Z 8 E dasselbe bedeutet wie 1 Z + 8 E.

Die Kursleitung bespricht dann mit der Gruppe die zweite Aufgabe. Die Teilnehmer*innen sollen im Anschluss daran die weiteren Aufgaben alleine lösen. Wenn die Mehrheit der Teilnehmer*innen Schwierigkeiten beim selbstständigen Lösen hat, bietet sich hier eine Mathekonferenz an.

Die Aufgaben 2 bis 5 lässt die Kursleitung dann die Teilnehmer*innen nach einer kurzen Erläuterung der Aufgabenstellungen in Einzelarbeit lösen. Hier werden das Schreiben von Zahlwörtern sowie die Darstellung von Zahlen in der Stellenwerttabelle und am Zahlenstrahl geübt.

Bestehen bei einigen Teilnehmer*innen noch Schwierigkeiten bei der Umwandlung nicht-kanonisch gebündelter Zahlen in die kanonische Bündelung, gibt die Kursleitung zu Aufgabe 5 ein Zahlenbeispiel. Dazu wird die folgende Stellenwerttabelle präsentiert:

H	Z	E
	32	69
1	28	9
2	8	109
3		89
		389

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen:

Welche Zahlen sieht man hier?

Sind die Darstellungen falsch oder richtig?

Ziel der hier entstehenden Diskussion ist es, den Teilnehmer*innen zu vermitteln, dass die Darstellungen alle richtig sind und die Zahl 389 zeigen. Allerdings wurde die Zahl in der Stellenwerttabelle jeweils nicht-kanonisch erfasst, da die Stellenwerte nicht vollständig gebündelt, sondern z. T. entbündelt dargestellt wurden. So ist z. B. in der Schreibweise mit 1 H 28 Z 9 E nicht vollständig gebündelt worden und die dargestellte Zahl sehr viel umständlicher zu ermitteln als in der wohlstrukturierten Bündelung 3 H 8 Z 9 E.

Dennoch ist die Entbündelung von entscheidender Wichtigkeit beim Rechnen mit mehrstelligen Zahlen.

Weitere Fragen dazu an die Teilnehmer*innen:

Wann braucht man das Entbündeln?
Warum ist es hilfreich, dass man 1 H entbündeln kann in 10 Z oder 100 E oder in 9 Z und 10 E?

Hat jemand dazu eine Idee, ein Beispiel?

Wenn die Teilnehmer*innen nicht auf die Lösung kommen, hilft die Kursleitung:

Bei der Subtraktion oder dem Wechseln von Geld kann das Wissen über die Entbündelungsmöglichkeiten mehrstelliger Zahlen/Beträge hilfreich sein, z. B. wenn es einen 100 €-Schein in kleinere Scheine (10 €-Scheine: 10 Stück) einzutauschen gilt oder wenn von 1 Hunderter genau 8 E abzuziehen sind: Dann ist es hilfreich zu wissen, dass der Hunderter zunächst in 10 Zehner und dann einer der Zehner in Einer eingetauscht werden kann, um die 8 Einer wegnehmen zu können, ohne dass die anderen 9 Zehner entbündelt werden müssen. Auch beim Halbieren einer ungeraden Anzahl von Zehnern oder Hundertern ist ein Entbündeln bzw. Tauschen in die nächstkleinere Einheit unumgänglich. Die Hälfte von z. B. 30 wird ermittelt, indem zwei Zehner ganz belassen werden und ein Zehner in 10 Einer zerlegt werden; dann können die zwei Zehner und die 10 Einer getrennt halbiert werden. Dieselbe Vorgehensweise ist beim Halbieren einer ungeraden Anzahl von Hundertern, Tausendern etc. erforderlich.

Detaillierter wird die zentrale Bedeutung der Entbündelung für die Subtraktion in Kapitel 11.7 erarbeitet.

RÜCKSCHAU

Für einen sicheren Umgang mit mehrstelligen Zahlen ist es wichtig zu wissen, was die Notation unseres Stellenwertsystems bedeutet:

Die Zahl 1235 beispielsweise gibt in dieser Notation Auskunft darüber, dass sie aus einem Tausender, 2 Hundertern, 3 Zehnern und 5 Einern besteht. Die Teilnehmer*innen haben in dieser Unterrichtseinheit gelernt, dass man 1235 auch in anderer Bündelungsweise darstellen kann wie z. B. 12 Hunderter, 2 Zehner und 15 Einer. Letztere Darstellung ist zwar nicht-kanonisch, muss aber verstanden sein, um mehrstellige Zahlen beliebig bündeln und entbündeln und damit zerlegen zu können. Der sichere Umgang mit dem Aufbau von Zahlen und dem Stellenwertsystem ist Voraussetzung für das Rechnen.

Die Bündelungsprinzipien sind folgende:

- Immer 10 werden zu einem Bündel zusammengefasst, damit entsteht ein neues Bündel auf der nächsthöheren Bündelungsstufe: 10 Einer = 1 Zehner.
- Es wird so weit wie möglich in Zehnerbündel zusammengefasst, um den Wert einer Zahl leichter zu erkennen: 20 Zehner + 38 Einer = 5 Zehner + 8 Einer ➔ Zahl: 58.
- Auch die Hunderter, Tausender… fasst man so weit wie möglich zusammen zur nächsten Bündelungsstufe.

Zum Verständnis wurden verschiedene Zahlen anhand unterschiedlicher Darstellungsweisen wie Tausenderbuch, Tausenderfeld, Zahlenstrahl, Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke betrachtet. Die (jeweils unterschiedlich gut sichtbare) Darstellung der stellenweisen Zerlegung wurde in all diesen Darstellungen betrachtet. Dies wird in Kapitel 11.3 vertieft.

11.3 Zahlzerlegung von dreistelligen Zahlen

EXPLORATION

Das Zerlegen von Zahlen in verschiedene Teile und in eine unterschiedliche Anzahl von Teilen (Teilmengen) ist eine wichtige Hilfe für die Ausführung der Rechenoperationen. Weiß man, dass eine dreistellige Zahl wie beispielsweise 139 nicht nur in ihre Bündel Hunderter (1 H = 100), Zehner (3 Z =30) und Einer (9 E = 9), sondern in beliebige Teile wie z. B. 100 und 39 oder 99 und 40 zerlegt werden kann, ermöglicht dies effektives Rechnen.

Daher werden in diesem Kapitel verschiedene Möglichkeiten der Zerlegung betrachtet und praktisch geübt.

11.3.1 Vortrag Kursleitung und Kursgespräch – Mehrstellige Zahlen in Stellenwerte und rechnerisch zerlegen

Didaktische Ziele
- Zerlegungen mehrstelliger Zahlen in ihre Stellenwerte wiederholen/festigen
- rechnerische Zerlegungen mehrstelliger Zahlen erkunden (als Vorbereitung für Rechenstrategien in Teilschritten)

So wie sich einstellige und zweistellige Zahlen in verschiedene Teilmengen zerlegen lassen, lassen sich ebenso dreistellige Zahlen in verschiedene Teilmengen zerlegen. Dabei ist die offensichtlichste Zerlegung durch die Bündel gekennzeichnet:

139 besteht aus 1 H 3 Z 9 E, also ist die 139 zerlegbar in 100, 30 und 9.

Wird jedoch die Menge 139 vollständig in lose Einer entbündelt, ergibt sich ein unübersichtliches Bild einer Menge, die sich nur noch durch Zählen erfassen lässt. Für das vorteilhafte Rechnen mit Zahlen wurde bereits in Kapitel 7 und 9 näher erläutert, dass Zerlegungen von Zahlen in Teile von großem Nutzen sein können.

Daher werden nachfolgend die Möglichkeiten anderer Zerlegungen betrachtet.

Zur Erinnerung: Die Zahlen 9 und 90 z. B. lassen sich wie folgt zerlegen, wenn man zunächst von 2 Teilmengen ausgeht:

9	
1	8
2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1

90	
1	89
2	88
…	…
10	**80**
11	79
12	78
…	…
20	**70**
…	…
87	3
88	2
89	1

Abbildung 11.3-1 Zahlzerlegungen der 9 und der 90

Fett und unterstrichen sind hier Zerlegungen in glatte Zehner wie 10 und 80, 20 und 70. Analog gibt es folgende Zerlegungen für die 139:

139	
1	138
2	137
3	136
4	135
5	134
6	133
7	132
8	131
…	…
137	2
138	1

Abbildung 11.3-2 Zahlzerlegungen der 139

Häufig bedarf es jedoch anderer Zerlegungen, z. B. in 3 oder mehr Teilmengen. Grundsätzlich ist jede Zahl in so viele Teilmengen zerlegbar, wie Einer vorhanden sind. Für die Zahl Zehn ist die weitest gehende Zerlegung:

10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1 + 1 + 1 + 1.

Die Zehn lässt sich aber auch zerlegen in:

10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 oder in
10 = 5 + 5 oder in
10 = 1 + 2 + 3 + 4 usw.

Welche Zerlegung jeweils vorteilhaft ist, ergibt sich aus der Aufgabenstellung. Für die Aufgabe

30 + 180 = __

z. B. ist die Frage hilfreich, ob es leichter ist, die 30 oder die 180 zu zerlegen und welche Zerlegung hier zielführender im Sinne kanonischen Bündelns und Rechnens ist.

Die 30 besteht aus 3 Zehnern, die 180 aus 18 Zehnern. Fragen an die Teilnehmer*innen:

> *Ist es hier sinnvoll, die 30 in 25 und 5 zu zerlegen? Warum bzw. warum nicht?*
>
> *Ist es hier sinnvoll, die 180 in 150 und 30 zu zerlegen? Warum bzw. warum nicht?*
> *Welche Zerlegungen finden Sie sinnvoll? Begründen Sie.*

Wie bereits in den vorherigen Kapiteln näher erläutert wurde, ist das Bündeln zu einem Hunderter/Zehner kanonisch und erleichternd für das Rechnen. Daher bieten sich hier zwei Alternativen an mit dem Wissen, dass 10 Z = 1 H:

30 wird zerlegt in 10 und 20, die 20 wird mit der 80 aus der 180 zu einem weiteren Hunderter gebündelt:

$\underline{30} + 180 = \underline{10 + \boxed{20} + 80} + 100$

$= 10 + \mathbf{100} + 100$

Die 180 lässt sich auch zerlegen in 70 und 110:

$30 + \underline{180} = \boxed{30 + \underline{70}} + \underline{110}$

$= \mathbf{100} + 110$

Fragen der Kursleitung an die Teilnehmer*innen:

> *Welche Zerlegung finden Sie besser? Begründen Sie. Gibt es andere Möglichkeiten? Sind diese sinnvoll?*

Die Zerlegung zweier dreistelliger Zahlen verläuft analog dazu. Für die Aufgabe 109 + 211 wäre zu fragen:

> *Welche der beiden Zahlen soll man zerlegen? Wie soll man zerlegen, um die Aufgabe leicht lösen zu können?*
>
> *109 in 100 + 9 oder 211 in 200 + 11?*
> *Oder 100 + 9 und 200 + 10 + 1?*
>
> *Oder gibt es eine andere Zerlegung, die sinnvoll ist?*

Diese Fragen werden im Rahmen des Kursgesprächs diskutiert. Die Kursleitung fasst die Ergebnisse an der Tafel zusammen.

11.3.2 Mathekonferenz – Zerlegen von dreistelligen Zahlen

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen um Nennung mehrerer (bis zu 5) dreistelliger Zahlen und notiert diese an der Tafel. Dann sollen die Teilnehmer*innen verschiedene Zerlegungen zu den Zahlen finden, die die Kursleitung an der Tafel unterhalb der Zahlen spaltenweise ebenfalls notiert:

BEISPIEL

Zahl:

367

Zerlegungen:

300	60	7	
360		7	
359		8	
100	100	100	67

… usw.

Den Teilnehmer*innen steht hier ausreichend Material der Mehrsystemblöcke zur Verfügung, damit sie die Zahlen unterschiedlich zerlegen können, auch mit Entbündelung von Zehnern und Hundertern. Ziel dieser Übung ist es, dass die Teilnehmer*innen eine Vielzahl möglicher Zerlegungen erarbeiten als Vorbereitung für die Addition und Subtraktion in Kapitel 11.7. Je mehr Sicherheit die Teilnehmer*innen im Zerlegen von Zahlen haben, desto sicherer werden sie beim Bündeln und Entbündeln bzw. Rechnen mit Zehner- und Hunderterübergängen.

Die Kursleitung und die Teilnehmer*innen planen hier ausreichend Zeit ein, um alle Möglichkeiten und deren Vorteilhaftigkeit zu diskutieren. Dabei können einzelne Teilnehmer*innen auch an die Tafel eingeladen werden, um ihre Vorschläge anzuschreiben und mit der Gruppe Alternativen zu besprechen.

RÜCKSCHAU

Die Zerlegung mehrstelliger Zahlen in andere Teile als die gebündelten Stellenwerte erleichtert das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen. Je komplexer die Zahlen und Aufgaben werden, desto wichtiger ist es, Zahlen flexibel zerlegen zu können und die Eigenschaften von mehrstelligen Zahlen zu kennen. Dazu gehören u. a. die Zerlegbarkeit in mehr als zwei Teile (412 = 4 H 1 Z 2 E) ebenso wie die Zerlegbarkeit in Teile, die von den stellenweisen Bündeln abweichen (456 = 42 Z 36 E). Welche Zerlegung schließlich von Vorteil ist, das unterscheidet sich in den jeweils konkreten Aufgaben. Darauf wird in Kapitel 11.6 und 11.7 näher eingegangen.

11.4 Zahlen hören, sprechen und schreiben

EXPLORATION

Je mehr Stellen eine Zahl hat, desto schwieriger wird die richtige Notation als Zahl und Zahlwort. Während die größeren Inkonsistenzen bei der Schreib- und Sprechweise zweistelliger Zahlen bestehen (siehe Kapitel 9.3 *Zahlen hören, sprechen und schreiben*), ist die Reihenfolge bei dreistelligen und vierstelligen Zahlen klarer: bei dreistelligen Zahlen steht der Hunderter am Anfang des Zahlwortes (von links) und der Zahl, bei vierstelligen der Tausender.

Dennoch können unterschiedliche Fehler beim Verschriftlichen gehörter Zahlen und der Zahlwörter auftreten, denn die Inkonsistenzen bei der Benennung von zweistelligen Zahlen wirken in die Benennung mehrstelliger Zahlen hinein. Diese werden in der vorliegenden Unterrichtseinheit anhand verschiedener drei- und vierstelliger Zahlen in praktischen Übungen analysiert. Ziel der Fehleranalyse ist es, die möglichen Fehler zu vermeiden.

Eine große Herausforderung nicht nur für *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* stellt die Inkonsistenz zwischen Zahlwörtern und Zahlen dar. In Kapitel 9.3 *Zahlen hören, sprechen und schreiben* wurden die Besonderheiten der Schreib- und Sprechweise zweistelliger Zahlen bereits erläutert. Nun kommen zwei weitere Stellen hinzu: die Hunderter und die Tausender. So ergibt sich die Herausforderung, die Zahlen von links nach rechts zu schreiben und dabei die Zehner und Einer in der richtigen Reihenfolge zu notieren.

11.4.1 Kursgespräch – Zahlen hören und schreiben

Didaktisches Ziel
drei- und vierstellige Zahlen nach Diktat richtig schreiben

Die Kursleitung diktiert den Teilnehmer*innen folgende Zahlen, die diese als Zahlworte und in Ziffernschreibweise notieren sollen:

158, 1.806, 845, 709, 613, 142, 1.387, 829

Dabei soll die Lesegeschwindigkeit variiert werden mit einer fließenden und einer langsamen Sprechweise, die nach jeder Stelle eine kurze Pause einfließen lässt („einhundert … acht … und … fünfzig“ versus „einhundertachtundfünfzig“). Dann bespricht die Kursleitung die Ergebnisse der Teilnehmer*innen in der Gruppe. Freiwillige können ihre Ergebnisse an die Tafel schreiben oder die Kursleitung schreibt falsche Varianten neben die Zahlen, die diskutiert werden.

Mögliche Fehler können z. B. sein:

158: Einhundertachtundfünfzig wird geschrieben als 185.

→ Mögliche Ursache: Zahlendreher bei Zehnern und Einern. Das im Deutschen erforderliche Drehen von Sprechrichtung und Schreibrichtung zweistelliger Zahlen wird nicht angewandt (es werden erst die 8, dann die fünfzig gehört und analog dazu links die 8 und dann rechts die 5 geschrieben)

Die Zahl wird geschrieben als 100 8 50.

→ Mögliche Ursache: die Zahlen werden so notiert wie gehört: einhundert (100), acht (8) und fünfzig (50). Hier weist die Kursleitung auf die Zusammensetzung der Zahlwörter aus den Stellenwerten einer Zahl hin, also: 1 Hunderter 8 Einer 5 Zehner[8].

Es kann auch vorkommen, dass die Zahlen 108 50 notiert werden.

→ Mögliche Ursache: Es wird die 108 gehört und notiert, dann die 50.

Hier findet eine Diskussion darüber statt, was für die einzelnen Teilnehmer*innen jeweils bei der Notation schwierig war. Folgende Fragen werden dazu gestellt:

Können Sie mögliche Gründe für die Fehler finden?

Wie kann man Fehler vermeiden?

Was haben die Zahlworte mit den Stellenwerten zu tun?

Im Nachgang bespricht die Kursleitung die aufgetretenen Fehler.

Sind noch andere falsche Schreibweisen möglich?

Welche?

Gehört	Mögliche Schreibweisen			korrekte Notation
100, 4 und 20	100 | 4 | 20	104 | 20	142	124
1.000, 300, 8 und 70	1.000 | 300 | 8 | 70	1.300 | 8 | 70	1.387	1.378
8, 100, 2 und 90	8 | 100 | 2 | 90	800 | 2 | 90	829	892

Abbildung 11.4.-1 Mögliche Fehler beim Schreiben von Zahlen

Die Kursleitung analysiert und diskutiert hier mit den Teilnehmer*innen die Fehler mit dem Ziel, gemeinsam Wege zu formulieren, mittels derer die Teilnehmer*innen diese Fehler vermeiden können (z. B. schnelles Sprechen der Zahlwörter, Zuordnung der Stellenwerte zu den Wortteilen etc.).

RÜCKSCHAU

Dreistellige Zahlen weisen am Anfang der Zahl und des Zahlwortes den Hunderter auf (168: einhundertachtundsechzig) und vierstellige Zahlen weisen am Anfang den Tausender auf, gefolgt vom Hunderter (eintausendsechshundertfünfundsiebzig).

Werden Zahlen bzw. Zahlwörter langsam gesprochen, können falsche Notationen entstehen wie z. B. 10068 anstatt 168 oder 1.000600570 anstatt 1675). Beim Hören von Zahlwörtern und Schreiben von Zahlen gilt es zu beachten, dass die Wortteile jeweils die Bündelungsstufen meinen. Die Herausforderung besteht darin, aus dem Gehörten die richtige Zuordnung des Zahlwortes zum Stellenwert zu finden:

- eintausend = 1 T,
- sechshundert = 6 H,
- fünf = 5 Einer und siebzig = 7 Zehner →
- THZE T H E Z
1675 und nicht 1.000600570.

11.5 Runden, schätzen und überschlagen

EXPLORATION

Im Alltag treten immer wieder Situationen auf, in denen die Bestimmung einer genauen Menge, Anzahl oder eines genauen Betrages nicht möglich oder nicht notwendig ist. In diesen Fällen ist es sehr hilfreich, mit gerundeten Zahlen, Schätzungen oder Überschlägen sicher umgehen zu können.

Als Beispiele seien hier genannt:

- Reicht das Bargeld für den Einkauf? Gesucht: Überschlag des Gesamtpreises der im Einkaufswagen liegenden Waren.
- Grobe Überprüfung eines Rechenergebnisses: kann es zum Beispiel stimmen, dass 2 kg Gemüse zusammen 10 € kosten, wenn der Kilo-Preis bei 2,50 € liegt?
- Sie gehen mit zwei Freunden ins Kino und haben nur 30 € bei sich. Sie möchten Ihre Freunde einladen, eine Karte kostet 8,50 €. Können Sie Ihre Freunde auch zu einem Getränk à 2,50 € und einer Tüte Popcorn à 5 € einladen?
- Verstehen und Interpretieren von Statistiken, z. B. in graphischen Darstellungen.
- Reicht das Urlaubsgeld von 400 € für die Reise nach Jamaika, wenn der Flug 359 € kostet, aber noch Unterkunft und Verpflegung hinzukommen?

Daher werden nachfolgend grundlegende Regeln für das Runden und der sichere Umgang mit Nachbarzahlen verschiedener Stellenwerte vermittelt. Je mehr Stellen eine Zahl hat, desto mehr Möglichkeiten gibt es, diese zu runden:

Eine zweistellige Zahl lässt sich auf Zehner und Hunderter runden, wobei hier immer nur die Nachbarhunderter 0 und 100 als Ergebnisse möglich sind, da alle zweistelligen Zahlen zwischen 0 und 100 liegen.

Eine dreistellige Zahl lässt sich auf Zehner, Hunderter und Tausender runden, als Tausender sind hier wiederum nur 0 und 1.000 möglich, da alle dreistelligen Zahlen zwischen 0 und 1.000 liegen. Mit praktischen Übungen werden die Teilnehmer*innen in der Lage sein, obige Fragen und andere Übungen zum Runden und Überschlagen zu beantworten bzw. zu lösen.

11.5.1 Vortrag Kursleitung – Runden, aber richtig

Didaktische Ziele
- Rundungsregeln aus der Wiederholung von Nachbarzahlen ableiten
- Rundungskonvention „bei 5 wird aufgerundet“ kennenlernen

In vielen Situationen ist es hilfreich oder erforderlich, Zahlen zu runden. Mit gerundeten Zahlen lässt es sich leichter rechnen. Dazu nachfolgend einige Beispiele zur Veranschaulichung. Die Darstellung kann am Zahlenstrahl erfolgen. Hier wurde eine tabellarische Übersicht vorgenommen.

BEISPIELE

Beispiel 1:
106 soll auf den Hunderter genau gerundet werden: Welche sind die Nachbarhunderter? 100 und 200
Zu welchem Hunderter ist der Unterschied geringer? Man sieht sofort: Der Unterschied zu 100 ist geringer.

106 soll auf den Zehner gerundet werden:
Welche sind die Nachbarzehner? 100 und 110
Zu welchem Zehner ist der Unterschied geringer? Man sieht sofort: Der Unterschied zu 110 ist geringer.

Beispiel 2:
134 soll gerundet werden: Die 134 hat als Nachbarzehner die 130 und 140, wobei der Abstand von 134 zur kleineren Zehnerzahl geringer ist. Wenn nicht angegeben ist, auf welchen Stellenwert gerundet werden soll, dann wird üblicherweise der nächste (also der nächstgelegene) Nachbar gewählt, hier würde folglich auf 130 abgerundet.

Beispiel 3:
Es soll die Zahl 178 gerundet werden.
Hier müsste man aufrunden auf 180, da der Unterschied zum kleineren Nachbarzehner – 170 – deutlich größer ist.

Wenn jedoch die Unterschiede zu beiden Nachbarzahlen gleich groß sind, bedarf es einer allgemeingültigen Festlegung.

Welche Regel finden Sie sinnvoll?

Ist es bei der Zahl 5 (Einer, Zehner, Hunderter, ...) sinnvoller, aufzurunden oder abzurunden?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Tatsächlich wurde folgende Festlegung getroffen:

Zahlen bis 4 werden abgerundet, d. h. hier wählt man die untere Nachbarzahl. Zahlen ab 5 – einschließlich der 5 – werden aufgerundet auf die obere Nachbarzahl. Vielleicht versuchen Sie sich an einer Begründung für die Wahl dieser Festlegung.

Etwas schematischer zusammengefasst geht man beim Runden von Zahlen so vor:

Man betrachtet die Stelle, die rechts von der zu rundenden Stelle steht, dahingehend, ob sie von 0 bis 4 oder größer/gleich 5 ist.

Anders ausgedrückt: Beim Runden auf Hunderter werden die Nachbarhunderter betrachtet, beim Runden auf Zehner die Nachbarzehner. Gerundet wird jeweils zur nächsten Nachbarzahl. Dazu noch einige Beispiele:

Zahl	gerundet auf H	gerundet auf Z
105	100	110
	Auf den Hunderter runden: Einer außer Acht lassen → 105 → Stelle rechts neben dem Hunderter = 0, also abrunden auf 100.	Auf den Zehner runden: Einer ansehen → 105 → letzte Stelle = 5, also aufrunden auf 110.

Zahl	gerundet auf H	gerundet auf Z
336	300	340
	Auf den Hunderter runden: Einer außer Acht lassen → 336 → Stelle rechts neben dem Hunderter = 3, also abrunden auf 300.	Auf den Zehner runden: Einer ansehen → 336 → letzte Stelle = 6, also aufrunden auf 340.

Zahl	gerundet auf H	gerundet auf Z
950	1.000	950
	Auf den Hunderter runden: Einer außer Acht lassen → 950 → Stelle rechts neben dem Hunderter = 5, also aufrunden auf 1.000.	Auf den Zehner runden: Einer ansehen → 950 → letzte Stelle = 0, also sind es schon runde Zehner und es braucht nicht gerundet zu werden.

11.5.2 Gruppenarbeit – Dreistellige Zahlen runden

Didaktisches Ziel
runden von dreistelligen Zahlen auf Zehner und Hunderter üben und festigen

Die Kursleitung präsentiert folgende Tabelle und fragt die Teilnehmer*innen, ob bzw. warum es die richtigen Rundungsergebnisse sind und wie man auf diese Ergebnisse kommt.

Zahl	gerundet auf H	gerundet auf Z
267	300	270
159	200	160
378	400	380
220	200	220
...		

Dann bilden die Teilnehmer*innen Gruppen à 3–4 Personen und notieren eine Tabelle auf Papier gemäß obiger Vorlage.

Innerhalb der Gruppe denken sich die Teilnehmer*innen zehn weitere Zahlen bis 1.000 aus und notieren diese in der 1. Spalte. Dann werden die gerundeten Zahlen bestimmt und die Lösungen in die entsprechende Spalte eingetragen. Fokus ist das Gespräch darüber, auf welche Weise man zum gerundeten Wert gelangt. Fortgeschrittene und interessierte Teilnehmer*innen können auch vierstellige Zahlen runden und ergänzen die Spalte „gerundet auf T".

Zeit für die Gruppen: ca. 10 Min.

Während der Gruppenarbeit erfasst die Kursleitung Fragen und Schwierigkeiten, die dann im Plenum besprochen werden.

Weiterführende Fragen der Kursleitung:

Welche Zahlen waren für Sie schwer zu runden?

Was waren die Schwierigkeiten?

Wie haben Sie diese gelöst?

Bei welchen Zahlen war das Runden leicht?

Begründen Sie!

Die Kursleitung fasst die Regeln für das Runden von Zahlen nochmal zusammen:

Zahlen von 0 bis 4 rundet man ab. Zahlen größer und gleich 5 rundet man auf. Das gilt für Einer, Zehner, Hunderter usw., also
- Runden auf (volle) Zehner: 145 → 150, 152 → 150
- Runden auf (volle) Hunderter: 250 → 300, 243 → 200
- Runden auf (volle) Tausender: 1200 → 1.000, 1500 → 2000

Soll man auf eine bestimmte Stelle runden, prüft man die nächste Stelle rechts davon, ob sie kleiner oder gleich bzw. größer als 5 ist:
- Runden auf Zehner: Man betrachtet die Einerstelle: 136 → 140 (6 > 5 → aufrunden), 273 → 270 (3 < 5 → abrunden)
- Runden auf Hunderter: Man betrachtet die Zehnerstelle: 379 → 400 (7 > 5 → aufrunden), 649 → 600 (4 < 5 → abrunden).

11.5.3 Vortrag Kursleitung und-Mathekonferenz – Rechnen mit Überschlägen (nicht nur) beim Einkauf

Didaktisches Ziel
An Beispielen aus dem Alltag erkunden, was beim überschlagenden Rechnen und beim Schätzen zu beachten ist. (Wann ist Runden sinnvoll? Welche Gefahren birgt das überschlagende Rechnen? Wann können Rundungskonventionen gebrochen werden?)

Beim Rechnen mit Überschlägen ist es hilfreich, sich zunächst die Frage zu stellen, wie exakt der Überschlag mit Blick auf das tatsächliche Ergebnis werden soll. Soll z. B. ein grober Überschlag eine Kaufentscheidung herbeiführen? Ob beim Einkauf von zwei Paar Schuhen zu 59,00 € und 65,00 € der Betrag von 100 € ausreicht, sagt ein Blick auf die Zehner: Fünf Zehner und sechs Zehner sind mehr als zehn Zehner, also mehr als ein Hunderter. Hier wird sofort deutlich, dass das Geld nicht reichen wird.

Grundsätzlich ist es sinnvoll, in Situationen, in denen eine Obergrenze vorliegt, tendenziell eher aufzurunden, um eine Überschreitung der Obergrenze auszuschließen.

BEISPIEL

Sie wollen einkaufen: Eine Jacke für 199,00 €, eine Hose für 71,00 €, ein T-Shirt für 34,00 €. Sie haben 350 € dabei und würden gerne noch ein Paar Schuhe kaufen für 49,00 €.

Reicht das Geld?

Die Kursleitung notiert die Beträge an der Tafel und lässt die Gruppe im Rahmen einer Mathekonferenz über diese Frage diskutieren. Nach 5–10 Minuten beendet die Kursleitung die Diskussion und präsentiert folgendes Tafelbild zur Erläuterung dieser Fragestellung:

BEISPIEL

Vorhandenes Budget: 350 €

Rundet man **alles ab**, ergibt sich:

190 € Jacke
70 € Hose
30 € T-Shirt
40 € Schuhe
gesamt: 330 €

Rundet man **korrekt**, ergibt sich:

200 € Jacke
70 € Hose
30 € T-Shirt
50 € Schuhe
gesamt: 350 €

Rundet man **alles auf**, ergibt sich:

200 € Jacke
80 € Hose
40 € T-Shirt
50 € Schuhe
gesamt: 370 €

Abbildung 11.5-1 Überschlag beim Einkauf – reicht das Geld?

Tatsächlich kosten diese vier Teile 353,00 €, bei korrektem Runden würde das Geld also nicht ausreichen. Wären alle Beträge abgerundet worden, hätte das Geld auch nicht gereicht, aber das Rundungsergebnis hätte suggeriert, dass es reichen würde.

Woran liegt das?

Zur Beantwortung bietet sich eine Diskussion im Rahmen einer Mathekonferenz an.

Erläuterungen durch die Kursleitung:

Bei der Jacke korrekt aufgerundet, wird der Betrag um 1 € erhöht.

Bei der Hose korrekt abgerundet, wird der Betrag um 1 € verringert.

Beim T-Shirt korrekt abgerundet, wird der Betrag um 4 € verringert.

Bei den Schuhen korrekt aufgerundet, wird der Betrag um 1 € erhöht.

Daraus ergibt sich, dass insgesamt um 2 € erhöht und um 5 € verringert wurde, wodurch sich die Differenz von 3 € ergibt (5 € – 2 € = 3 €). Dieser Betrag hätte Ihnen an der Kasse gefehlt.

Umgekehrt besteht bei der Vorgehensweise, alles aufzurunden, die Gefahr, dass zu vorsichtig („zu konservativ") gerechnet wird:

Wenn die Jacke nur 196 € kostet oder die Schuhe 46 €, dann reicht das Geld, aber das Aufrunden suggeriert, dass es nicht reicht. Manchmal ist es also statt zu runden ratsam, doch besser genau auszurechnen.

In anderen Fällen gilt es vor dem Runden zu überlegen, wie nahe der Überschlag am eigentlichen Ergebnis sein soll. Gilt es z. B., die Lösung einer gerechneten Aufgabe hinsichtlich Plausibilität zu prüfen, kann ein grober Überschlag zunächst genügen. Die Frage, ob es stimmen kann, dass 1 kg Möhren à 1,49 € und 1 kg Kartoffeln à 1,90 € auf dem Wochenmarkt 16,80 € kosten, lässt sich sofort beantworten.

Frage an die Teilnehmer*innen:

Kann der Gesamtpreis von 16,80 € stimmen? Begründen Sie!

Mögliche Antworten:

1. Ein Gesamtpreis von 16,80 € für 2 kg Gemüse ist höchst unwahrscheinlich.
2. Via Überschlag erhält man einen Gesamtpreis von 3,50 €.

Geht es um die Ermittlung eines möglichst genauen Rundungsergebnisses, kann es ebenfalls manchmal notwendig sein, von den herkömmlichen Rundungskonventionen abzuweichen.

Dazu ein Zahlen-Beispiel:

BEISPIEL

Für die Aufgabe 451 + 362 soll das Ergebnis der Rundung auf volle Hunderter möglichst nah am korrekten Ergebnis sein. Rundet man hier in beiden Fällen korrekt, erhält man:

500 + 400 = 900

Da jedoch beide Summanden relativ weit von den nächsten Nachbarn entfernt sind, ist das Ergebnis recht ungenau.

Würde man hier entgegen der Rundungskonventionen den ersten Summanden abrunden, weil der 2. Summand auch vergleichsweise weit entfernt ist vom Nachbarhunderter, erhielte man:

400 + 400 = 800

Das genaue Ergebnis lautet 813, die zweite Rundungsvariante wäre hier also deutlich näher am tatsächlichen Ergebnis.

11.5.4 Aufgabenblatt 11.5 a – Schätzen und Überschlagen im Alltag

Didaktisches Ziel
Aussagen mit eigenen Überschlägen überprüfen und eventuell korrigieren

Die Kursleitung händigt den Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 11.5 a**[9] aus und bespricht die Aufgabenstellungen. Es wird ferner geklärt, ob es Fragen zum Verständnis gibt. Dann sollen die Teilnehmer*innen zu jeder Aufgabe ein bis zwei Teil-Aufgaben in der Stunde lösen. Die Ergebnisse und die Herangehensweise werden besprochen. Besonderes Augenmerk ist darauf zu legen, dass die Teilnehmer*innen ihre Überlegungen verbalisieren und ihre Ergebnisse auch argumentieren. Die übrigen Aufgaben machen die Teilnehmer*innen zu Hause.

11.5.5 Vortrag Kursleitung und Kursgespräch – Überschläge und Schätzwerte in Statistiken

Didaktisches Ziel
aus statistischen Darstellungen (Säulen- bzw. Balkendiagramm und Liniendiagramm) exakte Werte sowie Tendenzen und Entwicklungen ablesen

Abschließend zum Thema Überschläge und Schätzwerte noch einige Erläuterungen zu Statistiken. Häufig werden Daten, die sich aus der Erfassung oder Beobachtung einer Vielzahl von Ereignissen ergeben, in Form von Säulen- oder Balkendiagrammen dargestellt. Als Beispiel seien hier genannt:

- die graphische Darstellung von Niederschlägen in bestimmten Zeiträumen und Orten
- Verhaltensweisen von Menschen wie zum Beispiel Konsumverhalten
- Verhaltensweisen von Tieren wie zum Beispiel Leben in Rudeln
- Straßenverkehrszählungen

Nachfolgende Graphik stellt die Lieblingsgetränke der Teilnehmer*innen verschiedener Volkshochschulkurse dar:

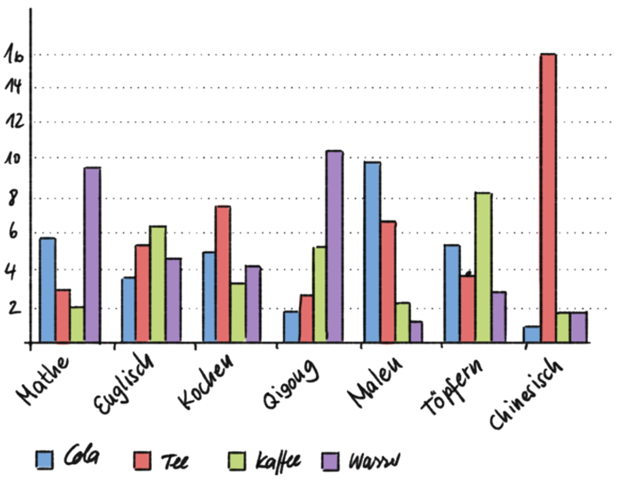


Abbildung 11.5-1 Säulendiagramm Lieblingsgetränke in der vhs, absolute Werte mit feiner Skalierung (linke Achse: Anzahl Teilnehmer*innen)

Hier lassen sich an der linken Achse (0, 5, 10, 15, 20) die tatsächlichen Werte gut ablesen, da die Einheiten in Zweier-Schritten angegeben werden. Bei graphischen Darstellungen wie diesen ist zu beachten, welche Skalierung an der Achse vorgenommen wurde. Wird die Skalierung gröber gewählt, ist das Ablesen genauer Werte erschwert, man muss schätzen:

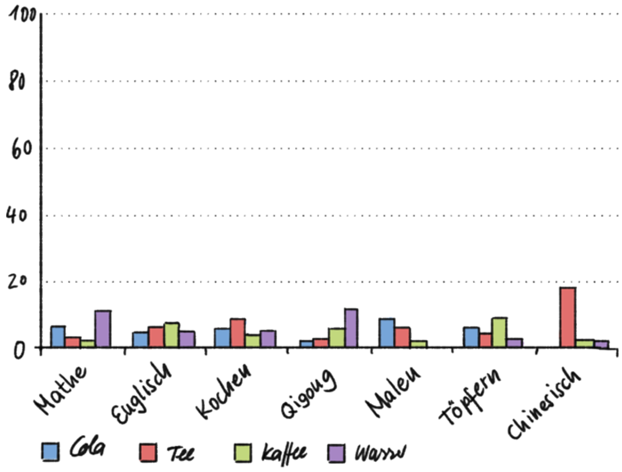


Abbildung 11.5-2 Säulendiagramm Lieblingsgetränke in der vhs, absolute Werte mit grober Skalierung (linke Achse: Anzahl Teilnehmer*innen)

In der nachfolgenden Darstellung sind die Angaben in Prozent, das heißt, ein absoluter Wert lässt sich nicht entnehmen:

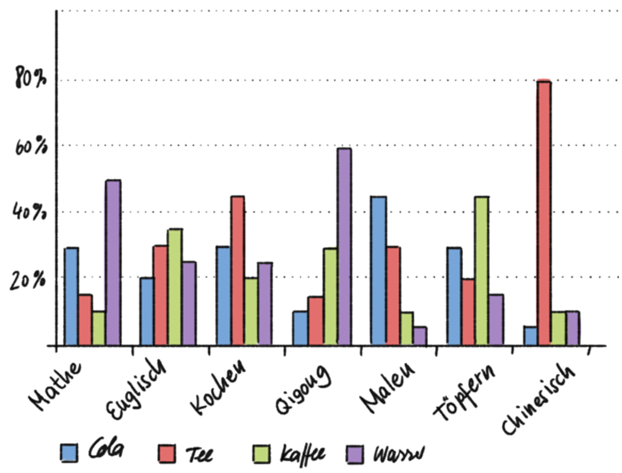


Abbildung 11.5-3 Säulendiagramm Lieblingsgetränke in der vhs, Prozent-Werte

Bei Statistiken wie dieser geht es hauptsächlich um die Interpretation der Daten-Gesamtheit und die Betrachtung von Auffälligkeiten, die sich aus dem Vergleich beispielsweise der Getränkepräferenzen oder der Kurse ergeben können. Als Beispiel sei genannt, dass im Chinesisch-Kurs auffallend viele Teetrinker*innen sind. Diese Information lässt sich sowohl aus der Darstellung mit absoluten Zahlen entnehmen als auch aus der prozentualen Darstellung.

Fragen der Kursleitung an die Teilnehmer*innen können sein:

*Wie viele Teilnehmer*innen in den einzelnen Kursen mögen Kaffee am liebsten? Versuchen Sie, die Werte so genau wie möglich abzulesen (Hilfestellung: Hinweis auf das Anlegen eines Lineals an der linken Achse).*

Welche Darstellung finden Sie besser? Begründen Sie.

Was sehen Sie in den Abbildungen? Beschreiben Sie, was Sie sehen! Welche Informationen erhalten Sie?

Eine weitere typische Darstellung von Daten erfolgt in Form eines Liniendiagramms:

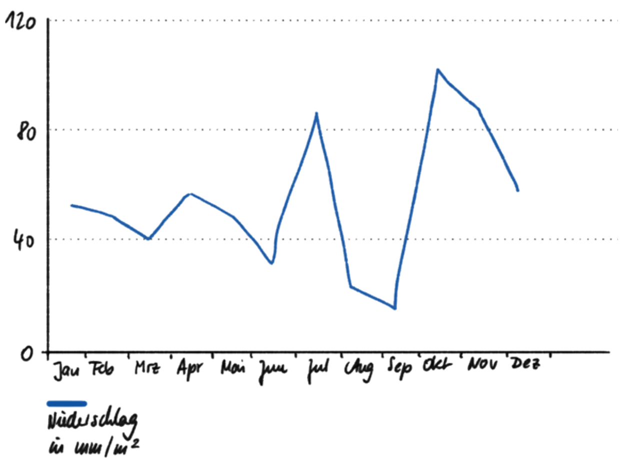


Abbildung 11.5-4 Niederschlag in Hannover, 1. Halbjahr 1990

Mit der gegebenen Skalierung können exakte Werte auch hier schwer abgelesen werden. Aber es lassen sich Aussagen über Tendenzen und Besonderheiten treffen. Es können z. B. folgende Fragen gestellt werden:

Was können Sie in Abbildung 11.5-4 erkennen? Beschreiben Sie den Verlauf des Niederschlags. Was fällt Ihnen auf?

Versuchen Sie, den Wert für Juli so genau wie möglich zu bestimmen. Bestimmen Sie den höchsten und den niedrigsten Wert.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen können mehrstellige Zahlen auf verschiedene Stellen runden und Überschläge ermitteln sowie Schätzungen abgeben. Dabei gilt es, beim Runden darauf zu achten, ob die nächstkleinere Stelle der zu rundenden Stelle einen Wert von 0 bis 4 aufweist (dann wird abgerundet) oder von 5 und größer aufweist (dann wird aufgerundet).

In Situationen des Alltags kann es hilfreich sein, diese Rundungskonventionen zu brechen, z. B. wenn man nicht sicher ist, ob der verfügbare Geldbetrag für den Einkauf bestimmter Waren ausreicht – dann kann tendenziell das Aufrunden vor unangenehmen Situationen schützen.

Die Teilnehmer*innen haben gelernt, statistischen Darstellungen verschiedene Informationen wie z. B. Tendenzen und Entwicklungen sowie etwaige Werte zu entnehmen.

11.6 Addition und Subtraktion ohne Zehner-/Hunderterübergang

EXPLORATION

Bei der Addition und Subtraktion hilft das Zerlegen der Zahlen in die Stellenwerte. Ist das Stellenwertsystem und das Zerlegen von mehrstelligen Zahlen in die Stellenwerte verstanden, lassen sich Additions- und Subtraktionsaufgaben ohne Zehner- und/oder Hunderterübergänge ohne normierten Algorithmus, also nicht schriftlich, leicht lösen, indem stellen- oder schrittweise gerechnet wird.

Es werden hier verschiedene Aufgaben betrachtet mit jeweils abweichender Anzahl von Stellen. In Abhängigkeit von den konkreten Zahlen bietet sich jeweils auch die Nutzung verschiedener Zahldarstellungsformen zur Verdeutlichung von Rechenstrategien an, die in diesem Abschnitt bzgl. ihrer Eignung betrachtet werden.

Diese sind die Stellenwerttabelle und die Mehrsystemblöcke, der Rechenstrich, das Tausenderfeld sowie die halbschriftliche Notation.

11.6.1 Mathekonferenz – Addition mit dreistelligen Zahlen [10]

Didaktische Ziele

- Rechenstrategien für Additionen ohne Stellenüberschreitungen erkunden („Stellenwerte extra“ oder „Schrittweise“)
- verschiedene Möglichkeiten kennenlernen, Rechenstrategien darzustellen (Systemmaterial, Stellenraster, Rechenstrich, halbschriftliche Notation)

Der Vorteil von Aufgabenstellungen, bei denen keine Zehner- oder Hunderterübergänge stattfinden ist, dass sie vergleichsweise leicht zu lösen sind, wenn man das Stellenwertsystem verstanden hat.

Die Kursleitung gibt den Teilnehmer*innen folgende Beispielaufgaben:

BEISPIELE

273 + 6   454 + 35   561 + 338

und fragt die Teilnehmer*innen, wie sie diese Aufgaben lösen würden. Die Kursleitung oder die Teilnehmer*innen notieren die Lösungswege an der Tafel. Verschiedene Darstellungsvarianten wie z. B. Mehrsystemblöcke, offener Zahlenstrahl, Stellenwerttabelle oder andere sind ausdrücklich erwünscht und werden anhand dieser einfachen Aufgabe noch einmal systematisch versammelt, um dann für die weiteren Rechnungen zur Verfügung zu stehen.

Die Mathekonferenz kann entweder so stattfinden, dass die verschiedenen Wege sofort miteinander in Beziehung gesetzt werden oder so, dass die Teilnehmer*innen zunächst Rechenwege vorstellen und dass diese erst dann vergleichend diskutiert werden:

Welchen Weg und welche Darstellung finden Sie besser? Können Sie das begründen? Wie finden die anderen die verschiedenen Wege und Darstellungen? Begründen Sie.

Warum ist dieser Weg hier eigentlich der gleiche wie der Weg dort?

Ziel hierbei ist es, die verschiedenen Sichtweisen und Argumente für die eine oder andere Darstellung und den einen oder anderen Lösungsweg auszutauschen. Es soll deutlich werden, wie eine Nutzung der stellenwertbezogenen Zahlzerlegungen das Rechnen effektiver macht.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgenden Lösungswege und Darstellungsmöglichkeiten, falls sie noch nicht genannt wurden:

Für die Aufgabe 273 + 6:

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
2	7	3
2	7	9

+ 6

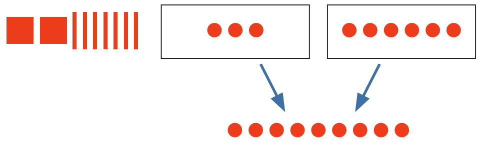


Abbildung 11.6-1 Darstellung der Aufgabe 273 + 6 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

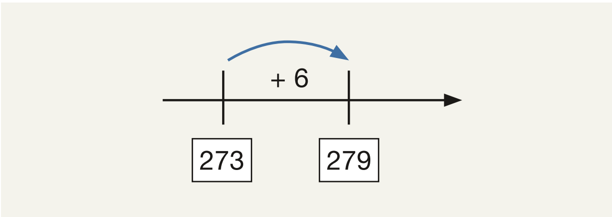


Abbildung 11.6-2 Darstellung der Aufgabe 273 + 6 am offenen Zahlenstrahl

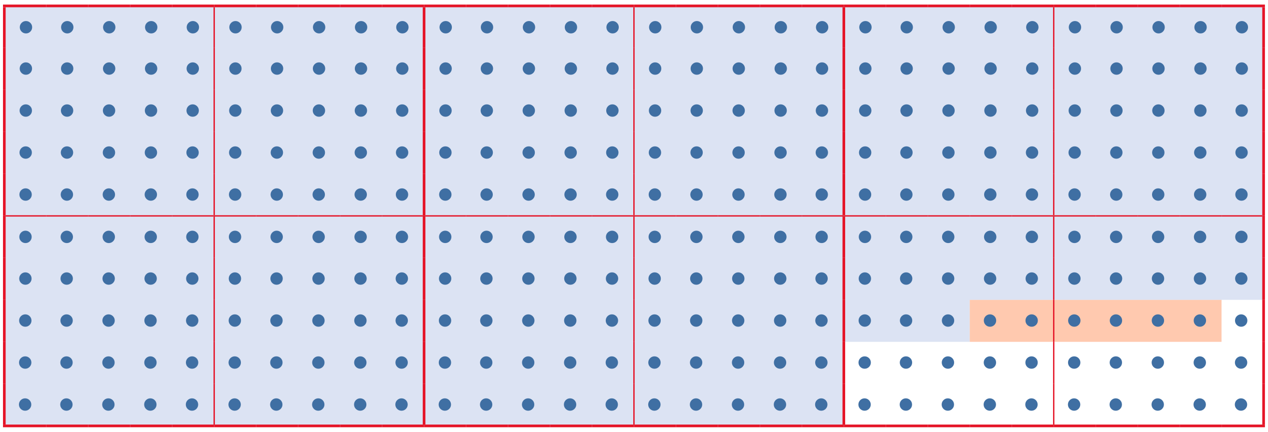


Abbildung 11.6-3 Darstellung der Aufgabe 273 + 6 im Tausenderfeld (Ausschnitt)

Halbschriftlich (gestütztes) Kopfrechnen [11]

Hier wird für die halbschriftliche Notation folgende gewählt:

273	+	6		
273	+	6	=	279

Über dem Strich steht die Aufgabe, dann folgt die schrittweise oder stellenweise Rechnung, im Beispiel nur ein Schritt bzw. nur eine Stelle.

Für die Aufgabe 454 + 35:

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
4	5	4
4	8	9

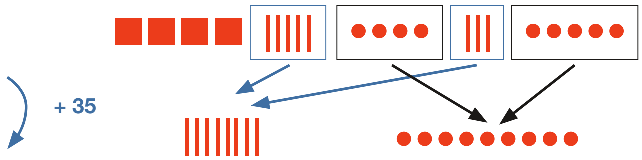


Abbildung 11.6-4 Darstellung der Aufgabe 454 + 35 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Hier gibt es zwei Varianten: man addiert zum ersten Summanden den zweiten Summanden schrittweise und zwar entweder

- zuerst die Zehner, dann die Einer oder
- zuerst die Einer, dann die Zehner:

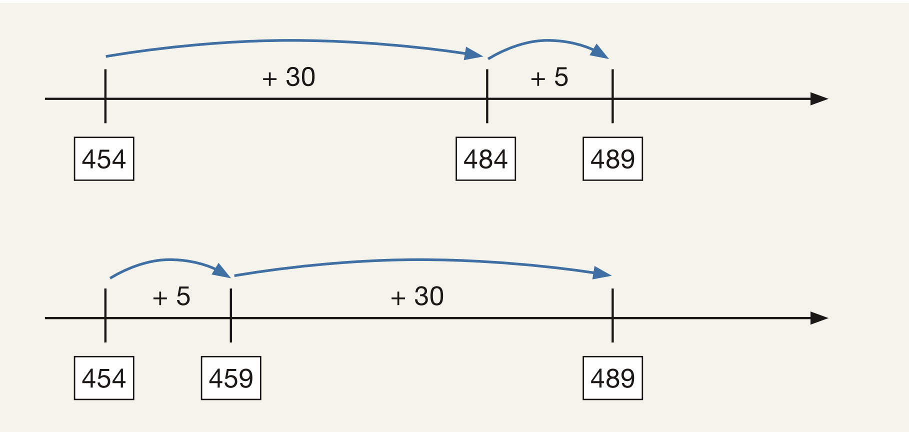


Abbildung 11.6-5 Darstellung der Aufgabe 454 + 35 am Rechenstrich

Halbschriftlich (schrittweise)

Hier werden die beiden Varianten bzgl. der Reihenfolge der Stellen wie beim offenen Zahlenstrahl betrachtet [12]:

454	+	35		
454	+	30	=	484
484	+	5	=	489

454	+	35		
454	+	5	=	459
459	+	30	=	489

Abbildung 11.6-6 Darstellung der Aufgabe 454 + 35 halbschriftlich

Zusammenfassend sind für die Addition einer zweistelligen zu einer dreistelligen Zahl geeignete Darstellungsmethoden:

- Stellenwerttabelle
- Mehrsystemblöcke
- offener Zahlenstrahl
- halbschriftlich

Für die Aufgabe 561 + 338:

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

Diese beiden Darstellungsmethoden bieten sich für die Visualisierung der Rechenstrategie „Stellenwerte extra“ an. Bei dieser Strategie werden Hunderter zu Hundertern, Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern addiert. Dies kann auch in anderer Reihenfolge erfolgen. Im Unterschied zur Strategie „Schrittweise“ werden hier beide Summanden in ihre Stellenwerte zerlegt und nicht nur der zweite Summand.

H	Z	E
5	6	1
8	9	9

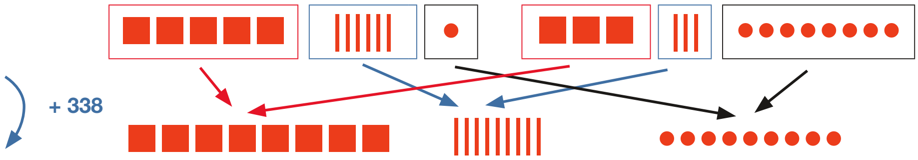


Abbildung 11.6-7 Darstellung der Aufgabe 561 + 338 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken, gelöst mit der Strategie „Stellenwerte extra“

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Im Gegensatz zu den vorigen Darstellungsmethoden wird hier der erste Summand nicht in Stellenwerte zerlegt. Der zweite Summand wird in Stellenwerte zerlegt und schrittweise zum ersten Summanden addiert.

Hier gibt es vier Varianten: Man addiert

- zuerst die Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer, beginnt also bei der ersten Stelle von links und geht der Reihe nach stellenweise vor, oder
- zuerst die Einer, dann die Zehner und schließlich die Hunderter, beginnt also bei der ersten Stelle von rechts und geht der Reihe nach stellenweise vor, oder
- zuerst die Zehner, dann die Einer und zuletzt die Hunderter oder
- zuerst die Zehner, dann die Hunderter und zuletzt die Einer.

Die letzten beiden Varianten werden jedoch nicht empfohlen, da bei ihnen nicht stellenweise der Reihe nach von rechts nach links oder von links nach rechts vorgegangen wird und das eher verwirrend sein kann. Daher werden im weiteren Verlauf nur die ersten beiden Varianten betrachtet:

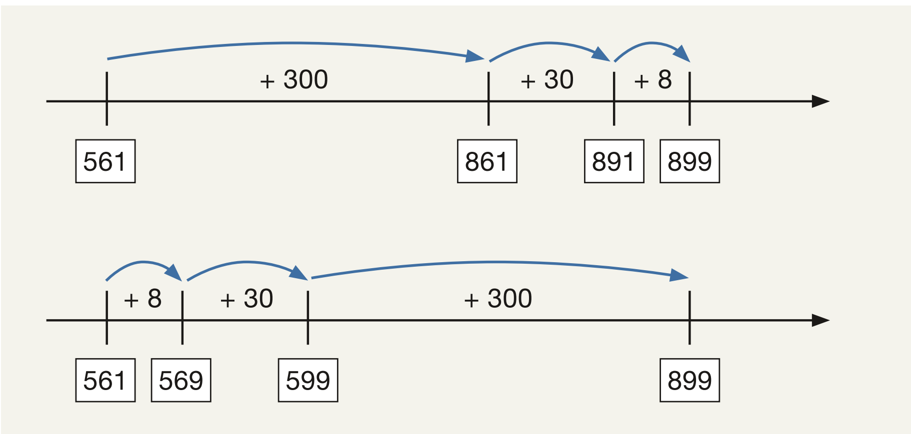


Abbildung 11.6-8 Darstellung der Aufgabe 561 + 338 am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich), gelöst mit der Strategie „schrittweise“

Halbschriftlich (schrittweise)
Auch hier werden die beiden Varianten betrachtet:

561 + 338	561 + 338
561 + 300 = 861	561 + 8 = 569
861 + 30 = 891	569 + 30 = 599
891 + 8 = 899	599 + 300 = 899

Der Weg ist vergleichbar mit der Addition einer zweistelligen zu einer dreistelligen Zahl.

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Die Grundidee ist bei der Addition ohne Zehner- oder Hunderterübergang stets dieselbe: Man schaut einzeln auf die Stellenwerte. Rechnen ist einfach, sofern das Rechnen im Zahlenraum bis 10 automatisiert ist. Wenn die Summe auf dem Stellenwert unter 10 bleibt, dann kann man die Summe direkt hinschreiben. Es bieten sich vorrangig zwei Lösungsstrategien an: „Stellenwerte extra“ (H + H, Z + Z, E + E) addieren oder „schrittweise“ (HZE + H + Z + E bzw. HZE + E + Z + H) addieren.

Die erarbeiteten Darstellungsmethoden sollen dabei unterstützen, Ergebnisse zu ermitteln. Sie eignen sich aber auch dazu, Rechenstrategien im Nachhinein deutlich zu machen bzw. zu kommunizieren.

11.6.2 Gruppenarbeit – Addition dreistelliger Zahlen ohne Zehner-/Hunderter-Übergang

Didaktische Ziele
- halbschriftliche Addition dreistelliger Zahlen ohne Stellenüberschreitung üben/festigen
- Darstellungsmethoden wählen, die beim Rechnen oder beim Verbalisieren des Lösungswegs unterstützen können

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen in Einzelarbeit, sich jeweils drei Additions-Aufgaben auszudenken, in denen weder ein Hunderter- noch ein Zehnerübergang stattfinden. Dann werden die Aufgaben an die Tafel geschrieben, damit sich alle Teilnehmer*innen die Aufgaben der anderen Teilnehmer*innen notieren können. In der Stunde werden noch Lösungswege und Darstellungsmethoden für zwei bis drei weitere Aufgaben miteinander besprochen und die Teilnehmer*innen bzgl. Unsicherheiten oder Schwierigkeiten befragt. Diese werden in der Stunde geklärt, damit die Teilnehmer*innen die übrigen Aufgaben als Übungen zu Hause machen können. Ziel dabei ist, dass die Teilnehmer*innen ihre Lösungswege auch darstellen bzw. verbalisieren können.

11.6.3 Mathekonferenz – Subtraktion von dreistelligen Zahlen ohne Zehner-/Hunderter-Übergänge

Didaktische Ziele
- Rechenstrategien für Subtraktionen ohne Stellenüberschreitungen erkunden („Stellenwerte extra“ oder „Schrittweise“)
- verschiedene Varianten zum Darstellen von Rechenstrategien der Aufgabe entsprechend nutzen (Systemmaterial, Stellenraster, Rechenstrich, halbschriftliche Notation)

Die Kursleitung gibt folgende Beispielaufgaben:

BEISPIELE

875 – 3   642 – 21   698 – 275

und fragt, wie die Teilnehmer*innen diese Aufgaben lösen würden. Die Lösungswege werden an der Tafel notiert. Verschiedene Darstellungsvarianten wie z. B. mit Mehrsystemblöcken, am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich), in der Stellenwerttabelle oder andere sind ausdrücklich erwünscht.

Nach ca. 5–10 Minuten [13] werden die Ergebnisse betrachtet und mögliche verschiedene Rechenwege verglichen:

Welchen Weg und welche Darstellung bevorzugen Sie? Können Sie das begründen? Wie bewerten die anderen die verschiedenen Wege und Darstellungen?

Inwiefern steckt hinter diesem Weg hier im Grunde der gleiche Gedanke wie hinter jenem Weg dort?

Ziel hierbei ist es, die verschiedenen Sichtweisen und Argumente für die eine oder andere Darstellung und den einen oder anderen Lösungsweg auszutauschen. Es gilt zu verdeutlichen, wie die Nutzung der stellenwertbezogenen Zahlzerlegungen das Rechnen effektiver macht.

Die Kursleitung zeigt, falls sie noch nicht genannt wurden, die nachfolgenden Lösungswege und Darstellungsmöglichkeiten für die Aufgabe 875 – 3 mit Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcken.

HINWEIS AN DIE KURSLEITUNG

Graphiken zu Mengenhandlungen sind selten selbsterklärend. Insbesondere die Subtraktion lässt sich graphisch nur schwer darstellen, da der Subtrahend keine eigene Menge darstellt, sondern eine Teilmenge des Minuenden ist. Daher ist eine wiederholte Erläuterung notwendig, dass mit der hier vorgeschlagenen Abbildung eine wegnehmende Handlung gemeint ist. Denkbar wäre zum Beispiel auch ein „Wegnehmen" der umkreisten Menge mit Hilfe eines Pfeiles.

H	Z	E
8	7	5
8	7	2

– 3

Abbildung 11.6-9 Darstellung der Aufgabe 875 – 3 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich):

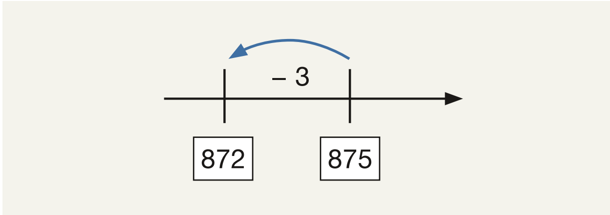
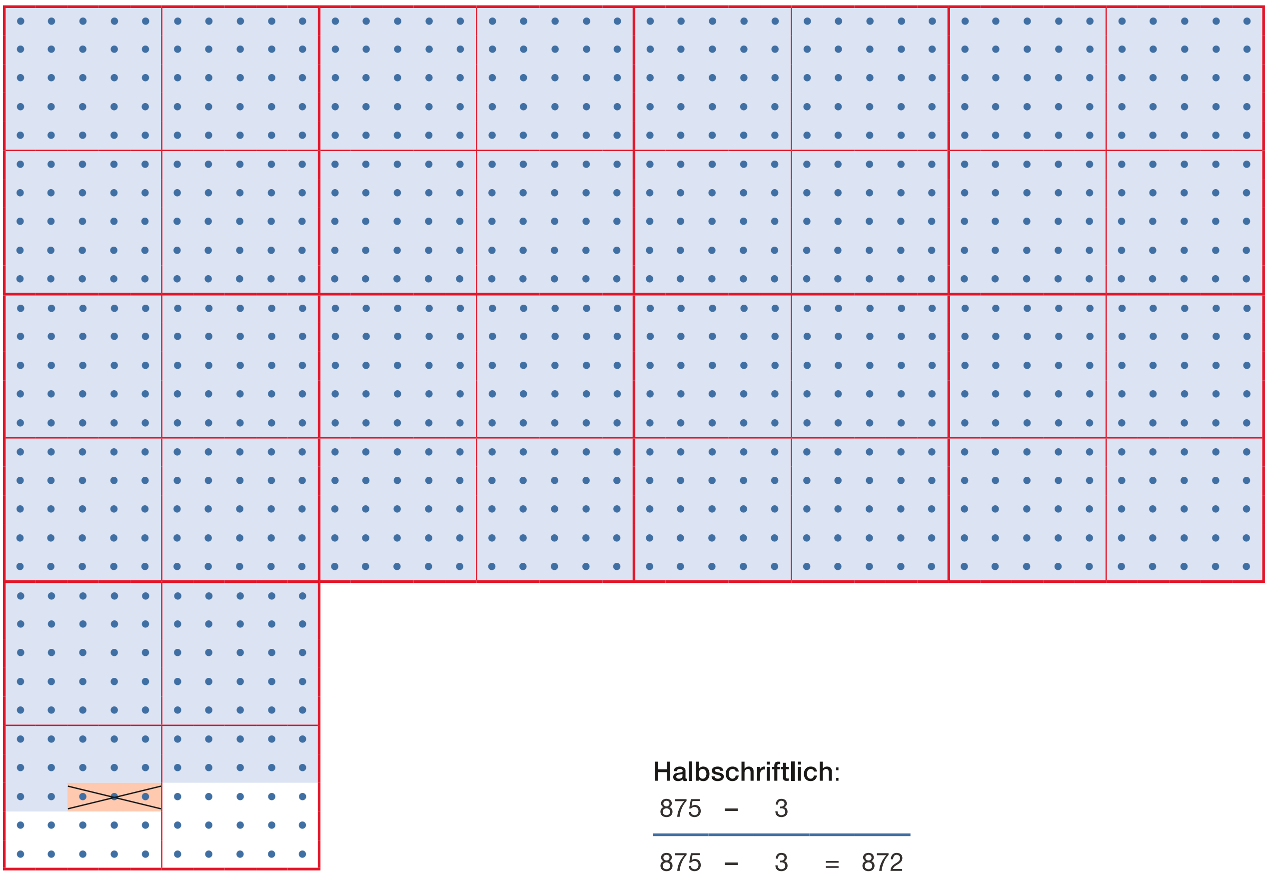


Abbildung 11.6-10 Darstellung der Aufgabe 875 – 3 am offenen Zahlenstrahl



Halbschriftlich:

875 – 3

875 – 3 = 872

Abbildung 11.6-11 Darstellung der Aufgabe 875-3 am Tausenderfeld (Ausschnitt)

Die verschiedenen Visualisierungsmöglichkeiten bzw. Notationsformen sind unterschiedlich gut geeignet für die Beispielaufgabe:

- **Stellenwerttabelle**
  Die Stellenwerttabelle kommt der schriftlichen Subtraktion sehr nahe und eignet sich weniger zur Darstellung einer Wegnehmhandlung als zur Bebilderung des Ermittelns eines Unterschieds zwischen zwei vorhandenen Zahlen.
- **Mehrsystemblöcke**
  Die Mehrsystemblöcke sind später bei Aufgaben mit Stellenunterschreitungen sehr hilfreich für die Darstellung der Schritte der Entbündelung. Hier wird nicht entbündelt, daher muss man hier nur die losen Einer zählen.
- **Leerer Zahlenstrahl (Rechenstrich)**
  Ist hier nicht hilfreich, da nur ein Rechenschritt stattfindet, später aber brauchbar zur Verdeutlichung von mehreren Rechenschritten.
- **Halbschriftliche Notation**
  Für die Subtraktion einer einstelligen Zahl von einer dreistelligen stellt das keine Erleichterung dar, da ohnedies nur ein Rechenschritt erforderlich ist.

Zusammenfassend kristallisieren sich die Darstellungen für die Subtraktion einer mehrstelligen von einer dreistelligen Zahl in der Stellenwerttabelle und halbschriftlich als die geeignetsten Varianten heraus. Die Darstellungen im Tausenderfeld erweist sich eher als nicht vorteilhaft und wird nachfolgend außer Acht gelassen.

Für die Aufgabe 642 – 21:
Darstellung der Strategie „Stellenwerte extra“ in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken:

H	Z	E
6	4	2
6	2	1

– 21

Abbildung 11.6-12 Darstellung der Aufgabe 642 – 21 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken, gelöst mit der Strategie „Stellenwerte extra“

In diesem Fall werden beide Zahlen, sowohl Minuend als auch Subtrahend in ihre Stellenwerte zerlegt. Dann werden Zehner von Zehnern weggenommen und Einer von Einern. Auch die umgekehrte Reihenfolge ist möglich.

Am offenen Zahlenstrahl
Hier gibt es zwei Varianten: Man subtrahiert vom Minuenden, der nicht in Stellenwerte zerlegt wird, schritttweise entweder

- erst die Zehner, dann die Einer oder
- erst die Einer, dann die Zehner:

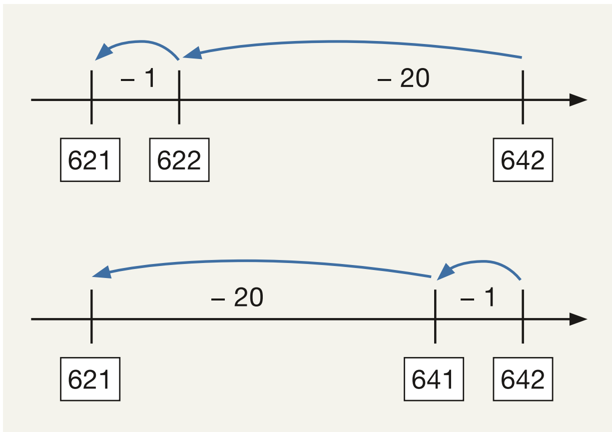


Abbildung 11.6-13 Darstellung der Aufgabe 642 – 21 am leeren Zahlenstrahl, gelöst mit der Strategie „Schrittweise“

Halbschriftliche Notation der Rechenstrategie „Schrittweise“[14]

642	–	21		
642	–	20	=	622
622	–	1	=	621

642	–	21		
642	–	1	=	641
641	–	20	=	621

Abbildung 11.6-14 Darstellung der Aufgabe 642 – 21 halbschriftlich notiert, gelöst mit der Strategie „Schrittweise“

Für die Aufgabe 698 – 275:

Darstellung der Strategie „Stellenwerte extra“ in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

H	Z	E
6	9	8
4	2	3

– 275

Abbildung 11.6-15 Darstellung der Aufgabe 698 – 275 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Hier werden folgende Varianten betrachtet: man subtrahiert vom Minuenden, der Ausgangszahl, schrittweise entweder

- zuerst die Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer, oder
- zuerst die Einer, dann die Zehner und schließlich die Hunderter, geht also der Reihe nach stellenweise vor.

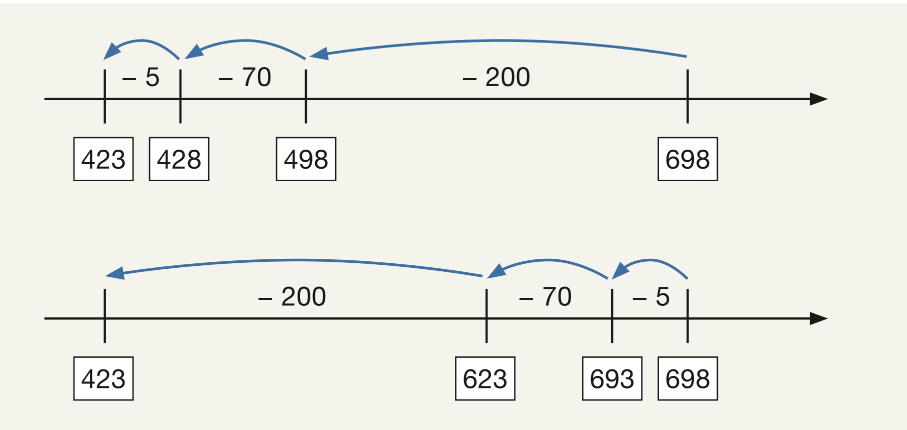


Abbildung 11.6-16 Darstellung der Aufgabe 698 – 275 am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Halbschriftliche Notation der Rechenstrategie „Schrittweise“[15]

Auch hier werden die beiden Varianten bzgl. der Reihenfolge der Stellen von links oder rechts betrachtet

698	–	275		
698	–	200	=	498
498	–	70	=	428
428	–	5	=	423

698	–	275		
698	–	5	=	693
693	–	70	=	623
623	–	200	=	423

Abbildung 11.6-17 Darstellung der Aufgabe 698 – 275 halbschriftlich

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Die Grundidee ist bei der Subtraktion ohne Zehner- oder Hunderterübergang stets dieselbe wie bei der Addition ohne Zehner- oder Hunderterübergang.

Man schaut einzeln auf die Stellenwerte. Rechnen ist einfach. Wenn die Differenz auf dem Stellenwert 0 oder größer bleibt, lässt sich die Differenz direkt bestimmen.

11.6.4 Gruppenarbeit – Subtraktion von dreistelligen Zahlen ohne Zehner/Hunderterübergang

Didaktische Ziele

- halbschriftliche Subtraktion dreistelliger Zahlen ohne Stellenüberschreitung üben/festigen
- Darstellungsmethoden wählen, die beim Rechnen selbst oder beim Verbalisieren des Lösungswegs unterstützen können

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen in Einzelarbeit, sich jeweils drei Subtraktions-Aufgaben auszudenken, in denen weder ein Hunderter- noch ein Zehnerübergang stattfindet. Dann werden die Aufgaben an die Tafel geschrieben, damit sich alle Teilnehmer*innen die Aufgaben der anderen Teilnehmer*innen notieren können. In der Stunde werden noch zwei bis drei weitere Aufgaben miteinander besprochen und die Teilnehmer*innen bzgl. Unsicherheiten oder Schwierigkeiten befragt. Diese werden in der Stunde geklärt, damit die Teilnehmer*innen die übrigen Aufgaben als Übungen zu Hause machen können.

RÜCKSCHAU

Die Addition zu und Subtraktion von dreistelligen Zahlen ist für Aufgaben ohne Zehner- und Hunderterübergänge leicht zu lösen. Das wurde mit verschiedenen Beispiel-Aufgaben von den Teilnehmer*innen wiederholt und routinisiert. Dabei wurden verschiedene hilfreiche Formen der Visualisierung bzw. der Notation verwendet, und zwar Stellenwerttabelle, Mehrsystemblöcke, offener Zahlenstrahl und halbschriftliches Rechnen.

Die Nutzung des Tausenderfeldes hat sich für das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen grundsätzlich als wenig hilfreich erwiesen, da es eher zum Zählen verleitet. Allerdings ist es in manchen Aufgaben möglich, dass die Teilnehmer*innen dieses Mittel doch subjektiv als geeigneter einschätzen.

11.7 Addition und Subtraktion mit Zehner-/Hunderterübergang und vorteilhaftes Rechnen

EXPLORATION

Hier gilt es für die Teilnehmer*innen, ihr erworbenes Wissen über den Aufbau des Dezimalsystems, über die Stellenwertsystematik mit Bündelung und nun auch mit der Entbündelung sowie über die Nachbarzahlen anzuwenden. Die zu addierenden oder zu subtrahierenden Zahlen werden dahingehend betrachtet, wie man möglichst geschickt (d. h. vorteilhaft) dieses Wissen nutzt und dann jeweils entscheidet, welche der Zahlen leichter zu ergänzen oder ggf. zu zerlegen ist und in welchen Schritten vorgegangen werden kann.

Dann werden verschiedene Rechenvereinfachungen für die Addition und die Subtraktion routinisiert.

11.7.1 Mathekonferenz – Addition zu dreistelligen Zahlen mit Zehner-/Hunderterübergang

Didaktische Ziele

- Rechenstrategien für Additionen mit Stellenüberschreitungen erkunden
- Darstellungen von Rechenstrategien der Aufgabe entsprechend nutzen

In Anlehnung an die Addition im Zahlbereich bis 100 sowie an das Wissen über die Bündelung, Entbündelung und Zerlegung mehrstelliger Zahlen lassen sich verschiedene Wege finden, wie man mehrstellige Zahlen ohne normierten Algorithmus, also im Kopf oder schriftgestützt, addieren kann. Die Kursleitung notiert folgende Beispielaufgaben an der Tafel:

BEISPIELE

368 + 26 456 + 274 587 + 209

Frage an die Teilnehmer*innen:

Wie können Sie diese Aufgaben lösen?

Die Lösungswege werden von der Kursleitung oder den Teilnehmer*innen an der Tafel notiert. Verschiedene Darstellungsvarianten wie z. B. mit Mehrsystemblöcken, leerem Zahlenstrahl, Stellenwerttabellen oder andere sind ausdrücklich erwünscht.

Nach ca. 15–20 Minuten werden die Ergebnisse betrachtet und mögliche verschiedene Rechenwege verglichen:

Welchen Weg und welche Darstellung finden Sie besser?

Können Sie das begründen?

Wie finden die anderen die verschiedenen Wege und Darstellungen? Begründen Sie.

Warum ist dieser Weg hier eigentlich der gleiche wie der Weg dort?

Ziel hierbei ist es, die verschiedenen Sichtweisen und Argumente für die eine oder andere Darstellung und den einen oder anderen Lösungsweg auszutauschen. Ziel ist es außerdem zu verdeutlichen, wie die Nutzung der stellenwertbezogenen Zahlzerlegungen das Rechnen effektiver macht.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgenden Lösungswege und Darstellungsmöglichkeiten, falls sie noch nicht genannt wurden:

Für die Aufgabe 368 + 26

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
3	6	8
3	6	14
3	6 + 1	4
3	7	4
3	7 + 2	4
3	9	4

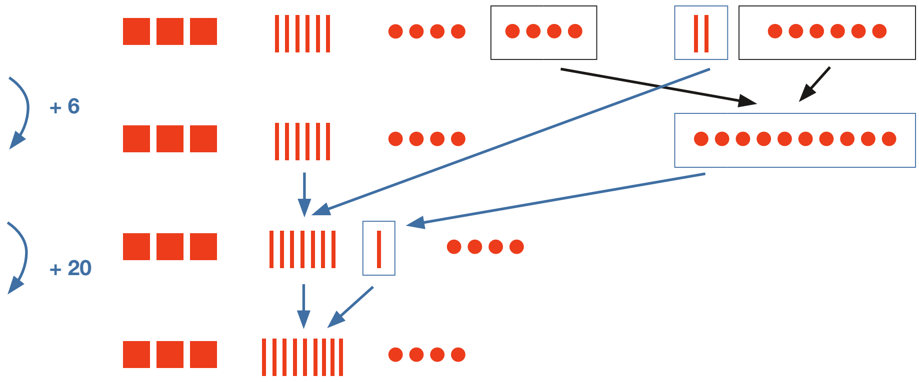
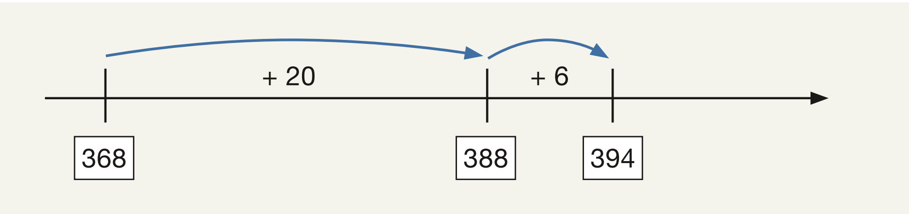


Abbildung 11.7-1 Darstellung der Aufgabe 368 + 26 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

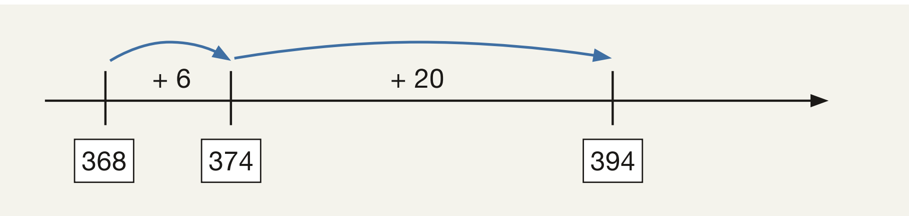
Bei der stellenweisen Addition in dieser Darstellung wird sinnvollerweise mit den Einern (rechts) begonnen, da die schrittweise Bündelung sich auf die nächste Stufe (nach links) auswirkt, wenn ein Zehnerübergang stattfindet.[16] Im ersten Schritt wird ein Zehner gebündelt, es bleiben vier ungebündelte Einer übrig. Der neu gebündelte Zehner wird zu den vorhandenen Zehnern addiert, sodass es nun sieben Zehner und noch vier Einer sind. Die Hunderter bleiben unverändert, da es nach der Bündelung der Einer zu einem weiteren Zehner weniger als zehn Zehner sind. Schließlich werden die beiden Zehner zu den inzwischen sieben Zehnern addiert, man erhält 394 als Ergebnis.

Am leeren Zahlenstrahl

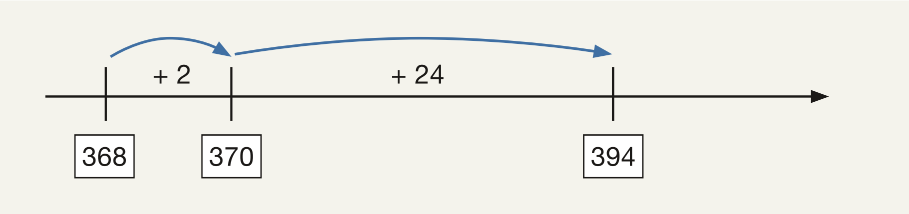
Variante 1 Man addiert zuerst die Zehner, dann die Einer



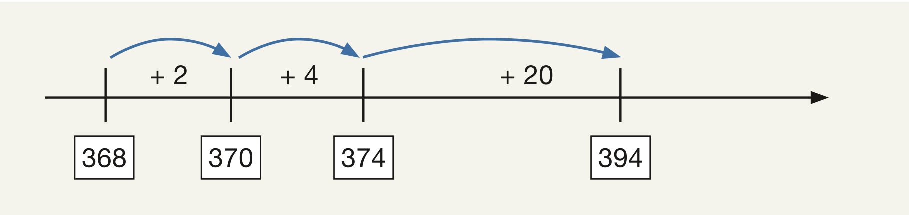
Variante 2 Man addiert zuerst die Einer, dann die Zehner



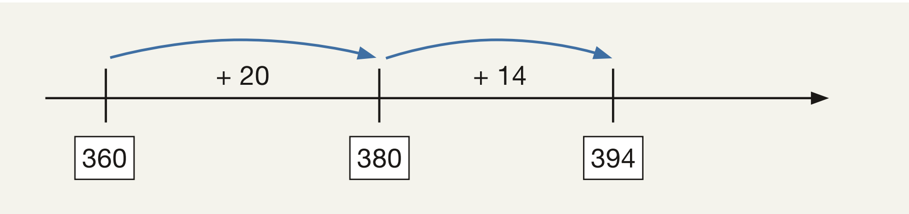
Variante 3 Man addiert so viele Einer, dass man zum oberen Nachbarzehner gelangt, dann die verbliebene Differenz, also 24:



Variante 4 Man addiert zunächst 2 (man addiert also zum oberen Nachbarzehner), dann die verbleibenden 4 Einer, dann die Zehner:



Variante 5 Man lässt die Einer beider Zahlen weg, addiert die Zehnerzahlen 360 + 20, und fügt schließlich die Summe der Einer hinzu (8 + 6 = 14):



Variante 6 Man rundet die hinzuzufügende Summe 26 zu 30 auf bzw. fügt 4 hinzu, sodass man mit einer Zehnerzahl weiterrechnen kann (+ 30). Dann muss man die 4 wieder abziehen:

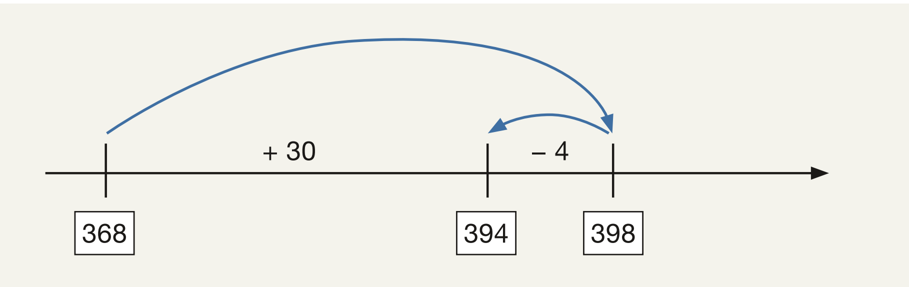


Abbildung 11.7-2 Darstellung der Aufgabe 368 + 26 am offenen Zahlenstrahl

Halbschriftlich

1. 368 + 26

368	+	20	=	388
388	+	6	=	394

2. 368 + 26

368	+	6	=	374
374	+	20	=	394

3. 368 + 26

368	+	2	=	370
370	+	24	=	394

4. 368 + 26

368	+	2	=	370
370	+	4	=	374
374	+	20	=	394

5. 368 + 26

360	+	20	=	380
8	+	6	=	14
380	+	14	=	394

6. 368 + 26

368	+	30	=	398
398	–	4	=	394

Abbildung 11.7-3 Darstellung der Aufgabe 368 + 26 halbschriftlich

Zu den einzelnen Varianten folgende Erläuterungen:

1. Analog zur ersten Variante am offenen Zahlenstrahl: Addition der Zehner, dann der Einer.
2. Analog zur zweiten Variante am offenen Zahlenstrahl: Addition der Einer, dann der Zehner.
3. Ergänzen zum oberen Nachbarzehner durch Addition von zwei Einern, dann die verbliebenen 24 hinzuaddieren.
4. Wie in 3., aber erst die fehlenden vier Einer, dann die beiden Zehner addieren.
5. Die Einer werden zunächst weggelassen, um die Zehnerzahlen zu addieren: 360 + 20 = 380. Nun werden die Einer addiert: 8 + 6 = 14, dieses Ergebnis wird zum ersten Ergebnis hinzuaddiert: 380 + 14 = 394.
6. Ergänzung des hinzuzufügenden Summanden 26 um 4 ergibt 30: 368 + 30 = 398. Nun werden die vier wieder subtrahiert und es ergibt sich 394.

Für die Aufgabe 456 + 274

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
4	5	6
4	5	10
4	5 + 1	0
4	6	0
4	6 + 7	0
4	13	0
4 + 1	3	0
5	3	0
5 + 2	3	0
7	3	0

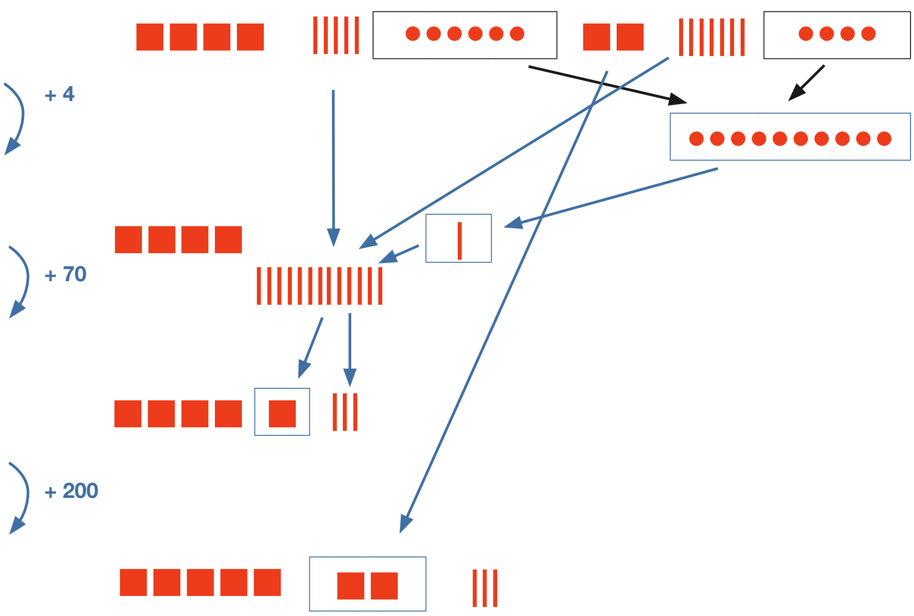
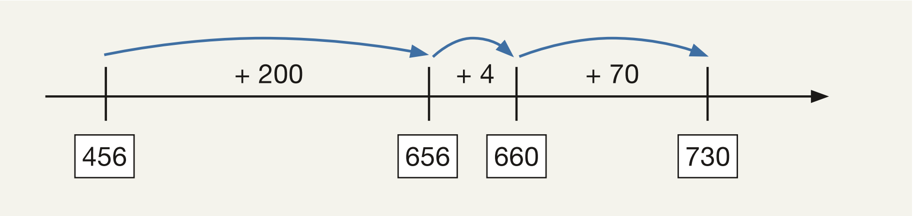


Abbildung 11.7-4 Darstellung der Aufgabe 456 + 274 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

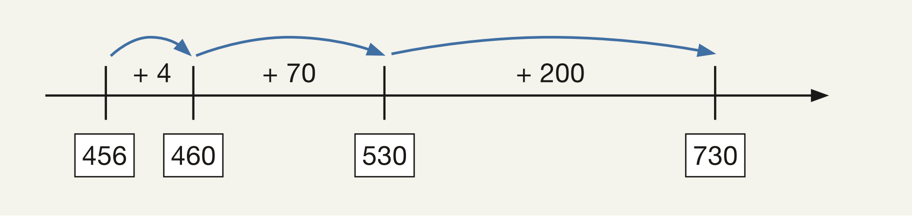
Im ersten Schritt werden die sechs Einer des ersten Summanden mit den vier Einern des zweiten Summanden zu einem Zehner gebündelt. Dieser wird zu den vorhandenen Zehnern addiert, sodass es nun sechs Zehner und null Einer sind. Im nächsten Schritt werden die Zehner addiert: zu sechs Zehnern sieben Zehner hinzugefügt, ergibt 13 Zehner, von denen zehn Zehner zu einem Hunderter gebündelt werden. Man erhält 530 und muss nun noch die verbleibenden 2 Hunderter addieren.

Am leeren Zahlenstrahl

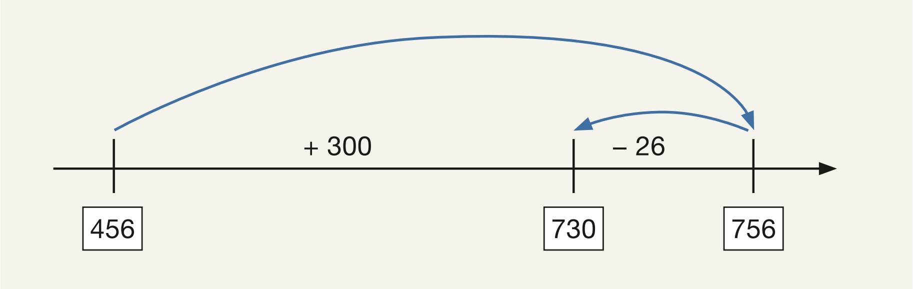
Im ersten Schritt Addition der beiden Hunderter, dann der vier Einer und schließlich der sieben Zehner:



Oder: Zunächst Addition der vier Einer, dann der sieben Zehner und schließlich der beiden Hunderter:



Oder: Aufrunden des zweiten Summanden zu 300, Addition der 300 zu 456 und schließlich Subtraktion der zu viel addierten 26:



Oder: Vernachlässigung der Einer und Addition der Hunderter und Zehner, um schließlich die Summe der Einer hinzuzufügen (+10):

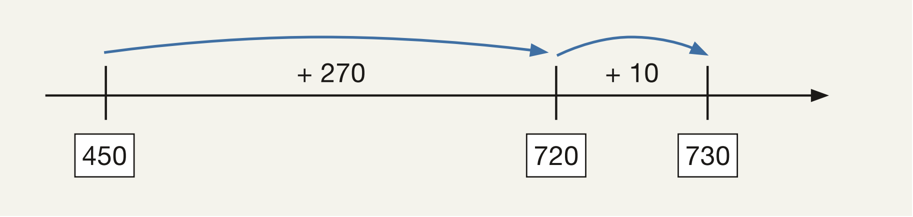


Abbildung 11.7-5 Darstellung der Aufgabe 456 + 274 am offenen Zahlenstrahl

Halbschriftlich

1.	456	+	274		
	400	+	200	=	600
	50	+	70	=	120
	6	+	4	=	10
	600 + 120 + 10			=	730

2.	456	+	274		
	456	+	4	=	460
	460	+	70	=	530
	530	+	200	=	730

3.	456	+	274		
	456	+	200	=	656
	656	+	70	=	726
	726	+	4	=	730

4.	456	+	274		
	456	+	300	=	756
	756	–	26	=	730

5.	456	+	274		
	450	+	270	=	720
	6	+	4	=	10
	720	+	10	=	730

6.	456	+	274		
	456	+	4	=	460
	274	–	4	=	270
	460	+	270	=	730

Abbildung 11.7-6 Darstellung der Aufgabe 456 + 274 halbschriftlich

Zu den einzelnen Varianten folgende Erläuterungen:

1. Stellenweise Addition der Hunderter, der Zehner und der Einer, dann Addition der 3 Summen.
2. Schrittweise Addition, beginnend mit der ersten Stelle rechts, also den Einern, dann Addition der Zehner und schließlich der Hunderter.
3. Schrittweise Addition, beginnend mit der ersten Stelle links, also den Hundertern, dann Addition der Zehner und schließlich der Einer.
4. Ergänzen des zweiten Summanden zum oberen Nachbarhunderter durch Addition von 26 (oder runden auf den Hunderter), dann Addition von 300 und wieder die hinzugefügten 26 abziehen.
5. Man lässt die Einer zunächst weg und addiert die Zehnerzahlen: 450 + 270 = 720. Nun addiert man die Einer 6 + 4 = 10 und addiert dieses Ergebnis zum ersten Ergebnis hinzu: 720 + 10 = 730.
6. Gegensinniges Verändern der Summanden: Die vier Einer von 274 werden zur 456 hinzugefügt. Die Summanden 460 + 270 lassen sich dann wieder gegensinnig verändern, indem vom ersten Summanden 30 weggenommen und zum zweiten Summanden addiert werden: 430 + 300 = 730.

11.7.2 Mathekonferenz – Subtraktion von dreistelligen Zahlen mit Zehner-/Hunderter-Übergängen

Didaktische Ziele
- Rechenstrategien für Subtraktionen mit Stellenunterschreitungen erkunden
- Darstellungen von Rechenstrategien in der Aufgabe entsprechend nutzen

Die Kursleitung gibt den Teilnehmer*innen folgende Beispielaufgaben

BEISPIELE

736 – 48 543 – 269 921 – 654

und fragt sie, wie sie diese Aufgaben lösen würden. Die Lösungswege werden von der Kursleitung oder den Teilnehmer*innen an der Tafel notiert. Verschiedene Darstellungsvarianten wie z. B. mit Mehrsystemblöcken, am leeren Zahlenstrahl, in Stellenwerttabellen oder andere sind ausdrücklich erwünscht.

Nach ca. 15–20 Minuten werden die Ergebnisse betrachtet und verschiedene mögliche Rechenwege verglichen:

Welchen Weg und welche Darstellung finden Sie besser? Können Sie das begründen?

Wie finden die anderen die verschiedenen Wege und Darstellungen? Begründen Sie.

Warum ist dieser Weg hier eigentlich der gleiche wie der Weg dort?

Ziel hierbei ist zum einen, die verschiedenen Sichtweisen und Argumente für die eine oder andere Darstellung und den einen oder anderen Lösungsweg auszutauschen, zum anderen zu verdeutlichen, wie die Nutzung der stellenwertbezogenen Zahlzerlegungen das Rechnen effektiver macht.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgenden Lösungswege und Darstellungsmöglichkeiten, falls sie noch nicht genannt wurden.

Für die Aufgabe 736 – 48

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E	
7	3	6	
7	2 + 1	6	
7	2	10 + 6	– 8
7	2	8	
6 + 1	2	8	
6	10 + 2	8	– 40
6	8	8	

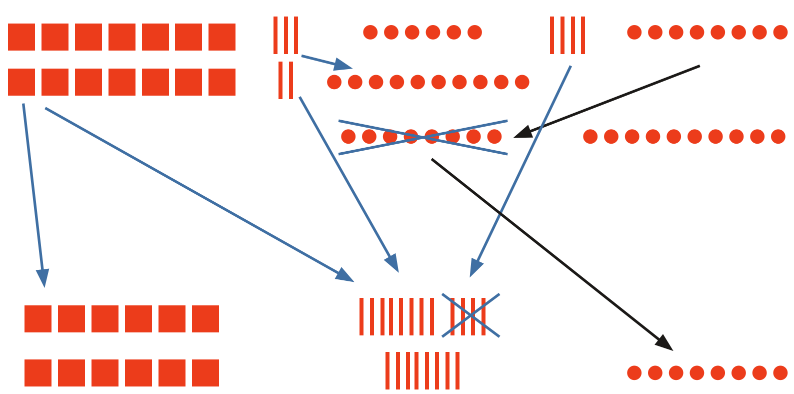


Abbildung 11.7-7 Darstellung der Aufgabe 736 – 48 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

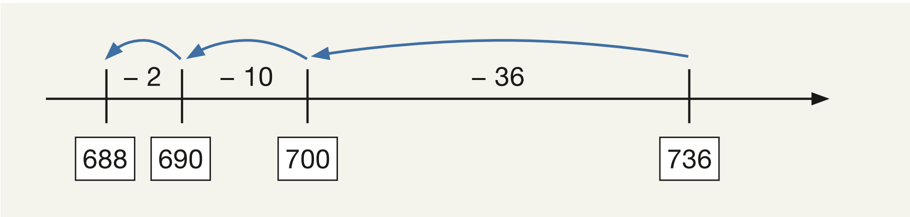
Im ersten Schritt ist ein Zehner in 10 Einer zu entbündeln, um acht Einer wegnehmen zu können. Es bleiben 7 H 2 Z 16 E – 8 E = 728.

Im nächsten Schritt sind vier Zehner zu subtrahieren, der Minuend [17] hat aber nur zwei Zehner.

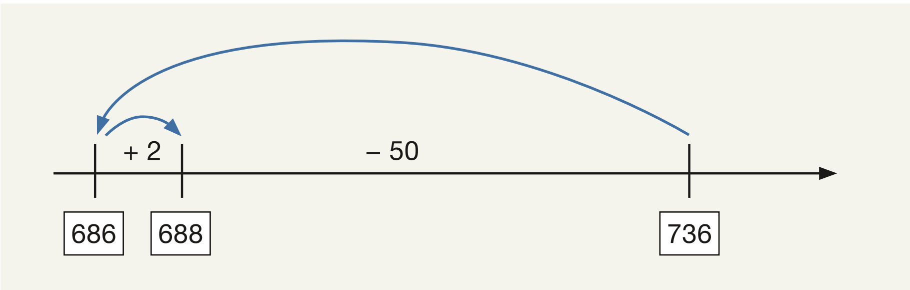
Daher muss nun ein Hunderter entbündelt werden in 10 Zehner. Von den 6 H 12 Z und 8 E können jetzt vier Zehner subtrahiert werden:

6 H 12 Z 8 E – 4 Z = 6 H 8 Z 8 E.

Am leeren Zahlenstrahl
In der ersten Variante subtrahiert man zunächst so viele Zehner und Einer, bis man beim nächsten Hunderter angelangt ist, dann den verbleibenden Zehner und schließlich die letzten beiden Einer:



In der nächsten Variante wird der Subtrahend zum glatten Zehner ergänzt (48 + 2 = 50), um dann diesen Wert zu subtrahieren und die beiden zu viel weggenommenen Einer wieder dazu zu addieren:



In der folgenden Variante werden zunächst die vier Zehner und dann die acht Einer subtrahiert:

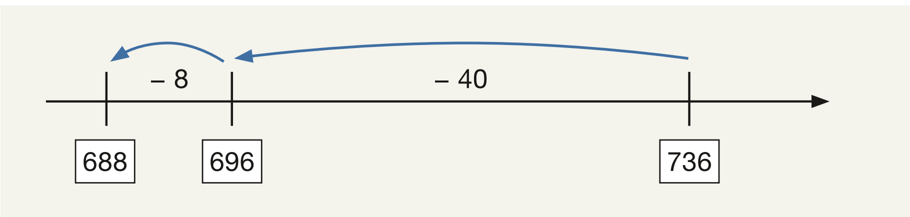


Abbildung 11.7-8 Darstellung der Aufgabe 736 – 48 am offenen Zahlenstrahl

Manche Teilnehmer*innen bevorzugen vielleicht eine Unterschreitung des Hunderters in Teilschritten und subtrahieren deshalb zunächst 30, dann 10 und schließlich 8.

Halbschriftlich

1. 736 – 48
   736 – 36 = 700
   700 – 10 = 690
   690 – 2 = 688

2. 736 – 48
   736 – 36 = 700
   700 – 12 = 688

3. 736 – 48
   736 – 50 = 686
   686 + 2 = 688

4. 736 – 48
   736 – 40 = 696
   696 – 8 = 688

5. 736 – 48
   730 – 40 = 690
   6 – 8 = –2
   690 – 2 = 688

Abbildung 11.7-9 Darstellung der Aufgabe 736 – 48 halbschriftlich

Zu den einzelnen Varianten folgende Erläuterungen:

1. Subtraktion bis zum nächsten Hunderter, also minus 36; dann Subtraktion des Zehners und schließlich der beiden Einer.
2. Wie in 1., aber nach der Subtraktion von 36 werden die noch zu subtrahierenden 12 in einem Schritt abgezogen.
3. Hilfsaufgabe: Ergänzen oder Runden des Subtrahenden zum nächsten Nachbarzehner (50) und schließlich wieder Addition der beiden zu viel abgezogenen Einer.
4. Erst Subtraktion der vier Zehner und dann der acht Einer.
5. Subtraktion mit der Strategie „Stellenwerte extra“: 730 – 40 = 690 und 6 – 8 = –2, dann werden die beiden Einer von der 690 abgezogen. Mit dieser Vorgehensweise kommt es zu negativen Ergebnissen, hier –2. Das führt häufig zu Verwirrung und zu einer Häufung von Rechenfehlern. Abhilfe kann die betonte Formulierung „dann noch zwei wegnehmen“ schaffen.

Für die Aufgabe 543 – 269

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
5	4	3
5	3 + 1	3
5	3	10 + 3
5	3	4
4 + 1	3	4
4	10 + 3	4
4	7	4
2	7	4

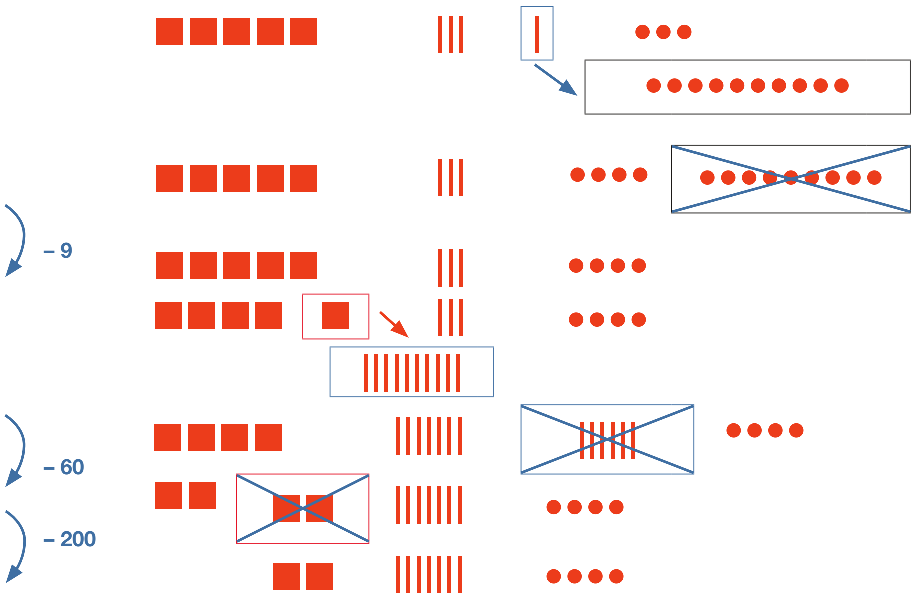


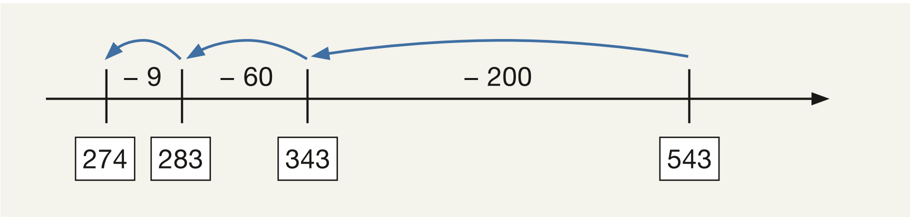
Abbildung 11.7-10 Darstellung der Aufgabe 543 – 269 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Im ersten Schritt ist ein Zehner in 10 Einer zu entbündeln, um neun Einer von dann 13 Einern wegnehmen zu können. Es bleiben 5 H 3 Z 13 E – 9 E = 5 H 3 Z 4 E.

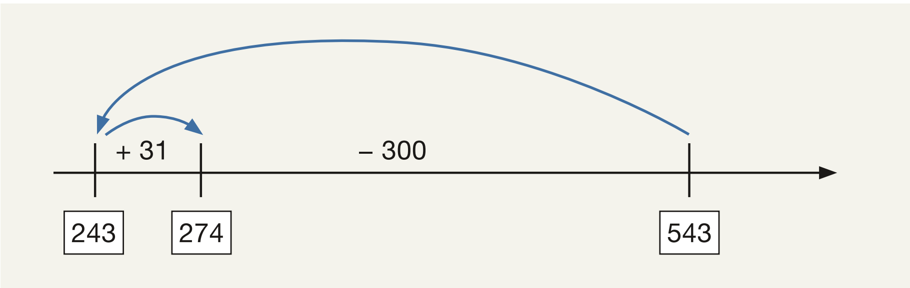
Im nächsten Schritt sind 6 Zehner zu subtrahieren, der Minuend hat aber nur noch 3 Zehner. Daher ist zunächst ein Hunderter in 10 Zehner zu entbündeln. Von den 4 H 13 Z und 4 E können jetzt 6 Zehner subtrahiert werden: 4 H 13 Z 4 E – 6 Z = 4 H 7 Z 4 E.

Im letzten Schritt sind noch 2 Hunderter zu subtrahieren, es bleiben 274 übrig.

Am leeren Zahlenstrahl
In der ersten Variante subtrahiert man zunächst die 2 Hunderter, dann die 6 Zehner und schließlich die 9 Einer:



In der zweiten Variante rundet oder ergänzt man den Subtrahenden zum nächsten Hunderter: 300. Da 31 hinzugefügt und diese 31 zu viel weggenommen wurden, sind nun wieder 31 zu addieren:



In der letzten hier vorgestellten Variante geht man erst bis zum nächsten Hunderter (– 43); dann subtrahiert man die verbleibenden Zehner und Einer (– 26) und schließlich die zwei Hunderter:

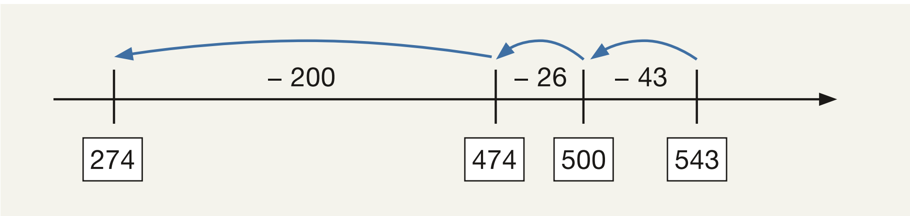


Abbildung 11.7-11 Darstellung der Aufgabe 543 – 269 am offenen Zahlenstrahl

Halbschriftlich

1. 543 – 269

543	–	200	=	343
343	–	43	=	300
300	–	26	=	274

2. 543 – 269

543	–	200	=	343
343	–	60	=	283
283	–	9	=	274

3. 543 – 269

543	–	300	=	243
243	+	31	=	274

4. 543 – 269

543	–	270	=	273
273	+	1	=	274

5. 543 – 269

500	–	200	=	300
40	–	60	=	–20
3	–	9	=	–6
300 – 20 – 6			=	274

6. 543 – 269

269	+	31	=	300
543	+	31	=	574
574	–	300	=	274

Abbildung 11.7-12 Darstellung der Aufgabe 543 – 269 halbschriftlich

Zu den einzelnen Varianten folgende Erläuterungen:

1. Subtraktion der beiden Hunderter; dann Subtraktion der Zehner und Einer bis zur Hunderterzahl 300. Von 300 werden die verbleibenden Zehner und Einer subtrahiert.
2. Schrittweises Subtrahieren: erst die beiden Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer.
3. Hilfsaufgabe: Ergänzen oder Runden des Subtrahenden zum nächsten Nachbarhunderter (300) und dann Addition des zu viel abgezogenen Wertes von 31.
4. Ergänzen des Subtrahendens um eins zu einer Zehnerzahl (270) und Addition des zu viel abgezogenen Einers dazu.
5. Man subtrahiert stellenweise: 500 – 200 = 300, 40 – 60 = -20 und 3 – 9 = -6, dann sind die Zehner und Einer von der 300 abzuziehen: 300 – 20 – 6 = 274.
6. Gleichsinniges Verändern: Minuend und Subtrahend werden um den gleichen Wert erhöht. Da eine Hunderterzahl leichter zu subtrahieren ist und bei dem Subtrahenden 31 bis zum nächsten Nachbarhunderter fehlen, werden jeweils 31 addiert: 543 + 31 = 574, 269 + 31 = 300 → 574 – 300 = 274.

11.7.3 Gruppenarbeit – Subtraktion von dreistelligen Zahlen mit Zehner-/Hunderter-Übergang

Didaktische Ziele
- halbschriftliche Subtraktion dreistelliger Zahlen mit Stellenüberschreitung üben/festigen
- Darstellungsmethoden wählen, die beim Rechnen selbst oder beim Verbalisieren des Lösungswegs unterstützen können

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, sich jeweils drei Subtraktions-Aufgaben auszudenken, in denen ein Hunderter- und/oder ein Zehnerübergang stattfinden. Dann werden die Aufgaben an die Tafel geschrieben, damit sich alle Teilnehmer*innen die Aufgaben der anderen Teilnehmer*innen notieren können. In der Stunde werden noch zwei bis drei weitere Aufgaben miteinander besprochen und die Teilnehmer*innen bzgl. Unsicherheiten oder Schwierigkeiten befragt. Diese werden in der Stunde geklärt, damit die Teilnehmer*innen die übrigen Aufgaben als Übungen zu Hause machen können.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen haben Additions- und Subtraktions-Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen via Zerlegung, Bündelung bzw. Entbündelung gelöst. Im Vordergrund stand dabei die Anwendung des Wissens um Zahlzerlegungen und Nachbarzahlen mit dem Ziel, vorteilhafte Rechenwege zu finden.

Die hier verwendeten Rechenwege waren:

- Bis zum nächsten Nachbarzehner/-hunderter addieren bzw. subtrahieren, dann die verbleibende Teilmenge schrittweise addieren bzw. subtrahieren.
- Gegensinniges Verändern bei der Addition, so dass einer der Summanden zum nächsten Nachbarzehner oder -hunderter ergänzt wird und der andere Summand entsprechend verringert.
- Gleichsinniges Verändern bei der Subtraktion, sodass möglichst der Subtrahend zu einer glatten Zehner- oder Hunderterzahl ergänzt wird, die dann leichter subtrahiert werden kann.
- Stellenweises Rechnen: Erst die Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer addieren bzw. subtrahieren. Sind im Minuenden weniger Zehner und/oder Einer als im Subtrahenden, sind die Differenzen der Zehner und/oder Einer von den Hundertern und/oder Zehnern abzuziehen.
- Schrittweises Rechnen: Erst bis zum nächsten Zehner, dann bis zum nächsten Hunderter oder direkt bis zum nächsten Hunderter ergänzen bzw. abziehen und schließlich die fehlenden Zehner/Einer addieren/abziehen; im letzten Schritt werden die Hunderter addiert oder subtrahiert. Die Reihenfolge kann auch andersherum sein, also erst die Hunderter addieren/abziehen, dann die Zehner/Einer.

ENDNOTEN

1 Das Dienes-Material hat den Vorteil, dass es die Bündelung gemäß der Systematik des Stellenwertsystems enthält. Beim Geld gibt es abweichende Bündelungen (Zweier. Fünfer, 20er, 50er, 200er, 500er). Damit kann die Mächtigkeit nicht in gleichem Maße verdeutlicht werden wie mit den Mehrsystem-Blöcken. Daher sollte bei der Verwendung von Geld in diesem Kapitel mit den 10-er Bündeln gearbeitet werden (1 € ➔ 10 € ➔ 100 €).

2 Mit stellenweisem Rechnen ist gemeint, dass immer die Einer, dann die Zehner und schließlich die Hunderter addiert werden.

3 Näheres dazu: vgl. Digitales Wörterbuch der deutschen Sprache: http://www.dwds.de/?qu=tausend

4 Wenn diese Antwort nicht genannt wird und die Teilnehmer*innen hier keine Antwort geben können, gibt die Kursleitung die Antwort mit Verweis auf Kapitel 9 *Immer zehn – das Bündelungsprinzip* und dass ebendiese Zehnerbündelung Inhalt dieses Kapitels sein wird.

5 Bearbeitungszeit ca. 60 bis 90 Minuten

6 Mit Bündelungsstufe ist gemeint, dass große Anzahlen in mehreren Stufen gebündelt werden. Beispiel: 10

7 Bearbeitungszeit ca. 30 bis 45 Minuten, wenn die Teilnehmer*innen mehrere Bündelungsvarianten wählen, entsprechend länger (je Variante ca. 10 bis 15 Minuten)

8 Zu Schreibfehlern bei zweistelligen Zahlen sei hier auf Kapitel 9.3 verwiesen. Wenn die Schwierigkeiten mancher Teilnehmer*innen vornehmlich mit den zweistelligen Zahlen auftreten, sollte die Kursleitung Übungen zu Kapitel 9.3 wiederholen.

9 Bearbeitungszeit ca. 60 bis 90 Minuten

10 Die Kursleitung stellt den Teilnehmer*innen ausreichend Mehrsystemblöcke zur Verfügung. Die Aufgaben in Kapitel 11.6 und 11.7 lassen sich von den Teilnehmer*innen statt mit Mehrsystemblöcken auch mit Geld lösen, wenn sich die Teilnehmer*innen das zutrauen. Oder die Aufgaben (gleiche oder andere Aufgaben) werden zunächst mit Zahlen und dann mit Geld gelöst. Dadurch haben die Teilnehmer*innen die Möglichkeit, auch mehr Routine im Umgang mit Geld zu bekommen.

11 Das halbschriftliche Rechenverfahren oder „gestütztes Kopfrechnen“ ist eine erleichternde Notation, wenn man sich Rechenschritte nicht merken kann/möchte. Dabei gibt es verschiedene Wege und Notationsformen. Diese Notationsformen sind nicht zu standardisieren, sondern die Teilnehmer*innen nutzen hier genau jene Notationen, die ihnen beim immer effektiveren Rechnen helfen. Ausführliche Erläuterungen dazu: Siehe Padberg, 2009, S. 159 ff.

12 Andere Möglichkeiten können z. B. sein: 454 + 30 + 5 = 484 + 5 = 489 oder 450 + 30 + 4 + 5 = 480 + 9 = 489. Siehe dazu auch Padberg, 2009, S. 158 ff.

13 Ausgehend davon, dass die Teilnehmer*innen nach den Übungen zur Addition mit dreistelligen Zahlen hier schneller zu den Ergebnissen kommen, wird hier weniger Zeit angesetzt. Sollte sich herausstellen, dass die Teilnehmer*innen mehr Zeit benötigen, erhalten sie diese.

14 Hier sind auch andere halbschriftliche Wege wie z. B. 642 – 20 – 1 = 622 – 1 = 621 oder 640 – 20 + 2 – 1 = 620 + 1 = 621 möglich. Wenn die Teilnehmer*innen andere Wege genannt haben und die für sie als vorteilhaft erscheinen, ist das gleichermaßen in Ordnung.

15 Andere Beispiele für halbschriftliche Subtraktion können sein: 698 – 200 – 70 – 5 = 498 – 70 – 5 = 428 – 5 = 423 oder 600 – 200 = 400, 90 – 70 = 20 und 8 – 5 = 3 ➔ ergibt: 400 + 20 + 3 = 423

16 Die Teilnehmer*innen sollten ruhig einmal links beginnen, damit die so auftretende Mehrarbeit erlebbar wird.

17 Die Zahlen der Subtraktion werden wir folgt bezeichnet: wenn 5 – 2 = 3, dann ist 5 der Minuend, 2 der Subtrahend und 3 die Differenz, auch Ergebnis der Subtraktion genannt.

MULTIPLI-KATION 13

13 MULTIPLIKATION

Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer
überarbeitet von Kora Deweis-Weidlinger

Didaktische Ziele

- die Rechenoperation Multiplikation als wiederholte Addition gleicher Summanden (sowohl zeitlich-sukzessiv als auch räumlich-simultan) verstehen
- die Rolle der Faktoren unterscheiden
- die Fachbegriffe der Multiplikation (Faktoren und Produkt) kennen und richtig benutzen
- Rechengesetze der Multiplikation verstehen und richtig anwenden, speziell das Vertauschungsgesetz
- Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben als Kernaufgaben herleiten und automatisieren
- Ableitungsstrategien erkunden und anwenden
- Aufgaben des kleinen Einmaleins automatisieren

Fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Anzahlen denken („Kardinaler Zahlbegriff" als Voraussetzung, um Mengen vervielfachen zu können)
- Operationslogik der Addition (um die Multiplikation als Addition gleicher Summanden zu verstehen)
- Zahlaufbau zweistelliger Zahlen (Sprechweise und Schreibweise zweistelliger Zahlen als Voraussetzung, um Ergebniszahlen richtig benennen oder anschreiben zu können und im Zahlenraum bis 100 richtig zu verorten)
- Bündelungsprinzip (um vor allem die Entbündelung in Ableitungsstrategien rechnerisch richtig anwenden zu können)
- Kopfrechnen (Plus und Minus) im Zahlenraum bis 100, inklusive Zehnerüber- und -unterschreitung (um Malaufgaben rechnerisch richtig ableiten zu können)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Die Multiplikation ist für *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* mit vielen Fehlschlüssen behaftet. Im Vergleich zur Addition und Subtraktion ist das Vervielfachen einer Menge abstrakter. Denn beim Multiplizieren wird nicht einfach eine Menge hinzugefügt bzw. weggenommen, sondern eine Menge wird vervielfacht. Demzufolge ist das Nachvollziehen der Mengenhandlung anhand der Gleichung schwieriger als bei Addition und Subtraktion. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Teilmengen nicht direkt an der Aufgabe – an den Faktoren – abgelesen werden können. Auch dieser Aspekt führt dazu, dass die Mengenhandlung, also das, was mit den Mengen passiert, schwieriger nachzuvollziehen ist. Ist den Teilnehmer*innen nicht deutlich, was auf der Mengenebene passiert, können Mal-Aufgaben schließlich nicht her- bzw. abgeleitet werden.

Die Hauptfrage der Multiplikation „Wie viel sind es insgesamt?" ist dieselbe wie bei der Addition. Da diese Frage jedoch mit der Addition und mit dem „Dazutun" einer Menge assoziiert wird, stellt die Herausarbeitung der Hauptfrage eine weitere Hürde beim Verstehen der Operationslogik dar.

Demzufolge sind die wichtigsten Erkenntnisse, die die Teilnehmer*innen bezüglich der Multiplikation aus diesem Kurs mitnehmen sollten, folgende:

- Wie bei Addition und Subtraktion ist es auch bei der Multiplikation essenziell, ein mengenhaft-dynamisches Verständnis für die Rechenoperation zu entwickeln. Mengenhaft-dynamisch meint, dass den Teilnehmer*innen bewusst ist, was mit den Mengen bei einer multiplikativen Handlung passiert. Denn nur aus der Logik, dass bei $3 \cdot 2$ dreimal eine Zweiermenge vorhanden ist ($2 + 2 + 2 = 6$), lässt sich verstehen, dass $3 \cdot 2$ insgesamt sechs sind.
- Die Teilnehmer*innen sollten nach der Bearbeitung der nachfolgenden Unterrichtskonzepte wissen, wie Multiplikation und Addition in Zusammenhang stehen. Dies erleichtert einerseits die mengenhafte Vorstellung ($3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 \rightarrow$ die Zwei ist drei Mal vorhanden), andererseits sind sie damit in der Lage, eine Aufgabe wie

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 in 6 · 4 umzuwandeln und folglich komplizierte Rechenwege (das einzelne Addieren der Vieren) zu vermeiden.

- Aus dem Wissen über den mathematischen Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation ergibt sich der nachfolgende Erkenntnisschritt: Wenn bekannt ist, dass 6 · 4 das Gleiche meint wie 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4, dann können die Teilnehmer*innen auch erkennen, dass aus 5 · 4 = 20 die Aufgabe 6 · 4 abgeleitet werden kann. Sie wissen z. B., dass 5 · 4 insgesamt zwanzig sind und zu 6 · 4 nur noch eine Vier hinzuaddiert werden muss. Das sind dann 6 · 4 = 24.
- Alle Möglichkeiten zur Ableitung von Mal-Aufgaben, die im Unterkapitel 13.2 thematisiert werden, basieren auf dem Wissen um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation bei einem gleichzeitig vorhandenen mengenhaft-dynamischen Verständnis der Rechenoperationen.
- Wichtig ist weiterhin, welche Frage die Multiplikation eigentlich immer beantwortet. Oder anders: Warum sollte ich Mal-Aufgaben ausrechnen? Was möchte ich damit erfahren?

BEISPIEL

Drei Kinder haben jeweils zwei Kugeln Eis bekommen.

3 · 2 Eiskugeln =
2 Eiskugeln + 2 Eiskugeln + 2 Eiskugeln =
6 Eiskugeln

Egal, welche Sachsituationen zu verschiedenen Mal-Aufgaben erdacht werden, am Ende steht immer die Frage danach, wie viele es insgesamt sind. Dieselbe Frage wie bei der Addition, denn jede Multiplikations-Aufgabe kann in eine Additions-Aufgabe umgeschrieben werden.

- Wenn Mal-Aufgaben in eine Mengenhandlung überführt werden, haben der erste und der zweite Faktor unterschiedliche Funktionen. Die Teilnehmer*innen werden sich vielleicht noch aus der Schulzeit daran erinnern, dass es egal ist, ob man 5 · 4 oder 4 · 5 rechnet. Dies ist allerdings nur teilweise korrekt. Richtig ist: Für die Gesamtmenge, d. h. für die Lösung der Aufgabe, ist es nicht relevant, ob 5 · 4 oder 4 · 5 gerechnet wird.

Beide Aufgaben haben dieselbe Lösung zur Folge. Für das mengenhaft-dynamische Verständnis und die Umwandlung von Additions- in Multiplikationsaufgaben macht es jedoch einen Unterschied.
Denn 5 · 4 entspricht der Additions-Aufgabe 4 + 4 + 4 + 4 + 4 und 4 · 5 entspricht der Additionsaufgabe 5 + 5 + 5 + 5. Haben die Teilnehmer*innen nicht verstanden, dass der erste Faktor angibt, wie viele Teilmengen vorhanden sind (der zweite Faktor gibt an wie groß eine Teilmenge ist), werden sie Probleme haben, Mal-Aufgaben herzuleiten. Nur wenn die Operationslogik verstanden ist, und dazu zählt auch die Funktion des ersten und zweiten Faktors, können Mal-Aufgaben abgeleitet werden. Dies verdeutlicht nachfolgendes Beispiel für eine falsche Herleitung der Mal-Aufgabe 6 · 4.

BEISPIEL

für die falsche Herleitung einer Multiplikations-Aufgabe, resultierend aus einem mangelnden Wissen um die unterschiedliche Bedeutung der Faktoren:

6 · 4 → 5 · 4 + **6 (!)***

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 →
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + **6 (!)***

Erst wird 5 · 4 = 20 gerechnet. Das ist hilfreich und eine der Aufgaben, die relativ schnell routinisiert werden. Anschließend wird fälschlicherweise eine Sechs anstatt der fehlenden sechsten Vier zur Zwanzig hinzugerechnet. Diese Art von Rechenfehler entsteht aus einer Unsicherheit bezüglich der unterschiedlichen Funktion des ersten und zweiten Faktors.

- Die Teilnehmer*innen sollen nach der Erarbeitung der *Operationslogik der Multiplikation* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.1) auch die Folgen eines Faktorentausches beschreiben können. Der Tausch der Faktoren macht für die zu ermittelnde Gesamtmenge, d. h. für die Beantwortung der Frage „Wie viele haben wir insgesamt?“, keinen Unterschied. Jedoch gewinnt der Tausch der Faktoren bei Betrachtung einer Sachsituation an Bedeutung.

BEISPIELE

Drei Kinder bekommen jeweils zwei Eiskugeln. Zusammen haben sie nun 6 Eiskugeln. Die Eltern bezahlen sechs Kugeln Eis:

3 · 2 Eiskugeln = 6 Eiskugeln

Werden die Faktoren jedoch getauscht, entsteht eine andere Gleichung und demzufolge auch eine andere Sachsituation:

2 · 3 Eiskugeln = 6 Eiskugeln

Zwei Kinder erhalten jeweils drei Kugeln Eis. Insgesamt sind sechs Kugeln zu bezahlen.

Es macht einen Unterschied, ob drei oder nur zwei Kugeln Eis gegessen werden können und ob drei oder nur zwei Personen ein Eis erhalten. Gleich ist jedoch, dass in beiden Situationen die Frage „Wie viele Eiskugeln sind es insgesamt?“ bzw. „Wie viele Eiskugeln müssen insgesamt bezahlt werden?“ die Antwort „sechs“ nach sich zieht. Denn für die Gesamtmenge macht es keinen Unterschied, ob 2 · 3 oder 3 · 2 gerechnet wird.

- Im Unterkapitel 13.2 ist ein Weg zum Herleiten und anschließenden Routinisieren des kleinen Einmaleins beschrieben. Das Erlernen des Einmaleins wird nicht dadurch erreicht werden, dass die Teilnehmer*innen alle Aufgaben auswendig lernen. Das haben sie ihrer Schulzeit mit ziemlicher Sicherheit schon versucht. Selbst wenn durch Auswendiglernen einige Aufgabensätze bekannt sind, ist dieses Wissen ohne Kenntnis der Operationslogik nicht übertragbar und somit auch nicht für Ableitungen nutzbar. Vielmehr soll in den nachfolgenden Unterrichtskonzepten das bereits vorhandene Wissen der Teilnehmer*innen genutzt und erweitert werden, sodass infolgedessen alle Aufgaben des kleinen Einmaleins und später auch Multiplikationsaufgaben mit größeren Zahlen abgeleitet werden können. Um Mal-Aufgaben abzuleiten, ist es unabdingbar, sich mit der Zerlegung von Faktoren zu beschäftigen.
  Wenn die Lösung der Aufgabe 4 · 8 nicht bekannt ist, können die Teilnehmer*innen zwischen verschiedenen Rechenwegen wählen. Alle hier vorgestellten Rechenwege haben gemeinsam, dass dabei der erste Faktor zerlegt wird.

BEISPIELE

4 · 8 = **2** · 8 + **2** · 8 = 16 + 16 = 32

Die Vier wurde in zwei und zwei zerlegt. Jeder Faktor muss wiederum mit acht multipliziert werden.

4 · 8 = **5** · 8 – **1** · 8 = 40 – 8 = 32

Die Vier wurde in fünf und minus eins zerlegt. Auch die Zerlegung in negative Faktoren ist möglich.

4 · 8 = **3** · 8 + **1** · 8 = 24 + 8 = 32

Die Vier kann auch in drei und eins zerlegt werden.

Die Teilnehmer*innen werden auf Zerlegungen zurückgreifen, von welchen sie die Mal-Aufgaben bereits im Kopf haben. Manche Teilnehmer*innen favorisieren die Addition von Zahlen, weshalb sie eher selten in negative Faktoren zerlegen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Eine Verständnisschwierigkeit ist, dass nach 10 · *irgendeine Zahl* Schluss mit den Mal-Aufgaben wäre. Folgendes Wissen über die Multiplikation ist dann noch nicht sicher:

- Entweder der Zusammenhang von Addition und Multiplikation ist noch nicht komplett erschlossen. Dann wissen die Teilnehmer*innen nicht, dass 10 · 6 das Gleiche bedeutet wie 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass es möglich ist, immer noch eine weitere Sechs zu addieren. Dann ist die Sechs z. B. elfmal oder zwölfmal vorhanden.
- Oder es ist noch kein mengenhaft-dynamisches Verständnis für die Rechenoperation vorhanden. Denn dann wäre bekannt: Wenn ich in zehn Monaten jeweils 6 € sparen kann, können auch im elften Monat wieder 6 € gespart werden. 11 · 6 € = 66 €. Jetzt wären insgesamt schon 66 € gespart worden.

Kursleiter*innen sollten unbedingt auf das unfreiwillige Vertauschen der Faktoren beim Herleiten von Mal-Aufgaben achten. Wenn nicht klar ist, dass 6 · 4 das Gleiche bedeutet wie 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4, kann es passieren, dass beim Herleiten zwar Bezug auf 5 · 4 = 20 genommen wird, dann aber fälschlicherweise noch eine 6 addiert wird. Hier wird es nicht von Erfolg gekrönt sein, weiter die Herleitung von Mal-Aufgaben zu üben. Es muss das Grundverständnis, d. h. die Operationslogik der Multiplikation, ausgebaut werden.

Ist kein umfassendes Operationsverständnis für die Multiplikation vorhanden, dann kann es passieren, dass die Teilnehmer*innen nur einen Weg zum Herleiten der Mal-Aufgaben kennen. Die Kursleitung sollte immer auch nach weiteren Möglichkeiten der Herleitung fragen. Es kann sein, dass sich die Teilnehmer*innen jeden einzelnen Weg zur Herleitung gemerkt, also Rechenwege auswendig gelernt haben.

Ein Beispiel: Ein*e Teilnehmer*in kann Achtmal-Aufgaben nur über den Weg fünfmal *die Zahl* und dann noch dreimal *die Zahl* lösen (5 · __ + 3 · __). Bei manchen Aufgaben könnte aber über zehnmal *die Zahl* minus zweimal *die Zahl* schneller hergeleitet werden (10 · __ – 2 · __).

Dazu nachfolgend ein Vergleich.

BEISPIELE

8 · 2 = 5 · 2 + 3 · 2 = **10 + 6** = 16
8 · 9 = 5 · 9 + 3 · 9 = **45 + 27** = 72

Achtmal-Aufgaben über Fünfmal-Aufgaben herleiten.

8 · 2 = 10 · 2 – 2 · 2 = **20 – 4** = 16
8 · 9 = 10 · 9 – 2 · 9 = **90 – 18** = 72

Achtmal-Aufgaben über Zehnmal-Aufgaben herleiten.

Bei der Aufgabe 8 · 2 haben beide Rechenwege – der über fünfmal die Zwei und der über zehnmal die Zwei – einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad.

Bei der Aufgabe 8 · 9 hingegen ist der Weg über 10 · 9 etwas leichter als die Lösung über 5 · 9 herzuleiten. Wenn 10 · 9 – 2 · 9 gerechnet wird, enthält die Rechnung keinen Zehnerübergang (90 – 18 anstatt 45 + 27). Bei Teilnehmer*innen, die ausschließlich über Fünfmal-Aufgaben herleiten, auch wenn eine andere Herleitung schneller zur Lösung führen würde, sollten Kursleiter*innen überprüfen, welche Gründe es für die einseitige Herleitungsstrategie gibt. Es besteht die Möglichkeit, dass entweder die Operationslogik der Subtraktion oder der Zahlaufbau zweistelliger Zahlen noch nicht vollständig verstanden wurde. Gibt es Unsicherheiten innerhalb dieser beiden Themengebiete – der Operationslogik oder dem Zahlaufbau –, ist das Lösen von Minusaufgaben schwieriger als das Lösen von Additionsaufgaben.

Wissenslücken und nicht übertragbares Wissen führen oft dazu, dass Mal-Aufgaben mit größeren Zahlen oder Divisionsaufgaben nicht mehr gelöst werden können. Die Kursleitung fragt aus diesem Grund immer auch nach weiteren Möglichkeiten zur Herleitung der Mal-Aufgabe:

Wie könnte die Aufgabe 8 · 8 = ? noch hergeleitet werden?", „Wie können Sie 8 · 8 = ? mithilfe der Aufgabe 10 · 8 ausrechnen?[1]

Zählen manche Teilnehmer*innen immer wieder die einzelnen Malreihen hoch (z. B. die 5er-Reihe: 5 … 10 … 15 … 20 … 25 … 30 … 35 usw.), kann dies entweder die Folge einer sehr lang praktizierten Strategie sein oder der Hinweis auf ein fehlendes Operationsverständnis. Auch in diesem Fall fragt die Kursleitung nach, wie man z. B. auch von 10 · 5 = 50 auf 5 · 5 ableiten kann. Wenn dies beantwortet werden kann, durchbricht die Kursleitung die Gewohnheiten der Teilnehmer*innen, indem nicht nur nach einer Mal-Aufgabe gefragt wird, sondern von vorgegebenen Aufgaben abgeleitet wird. Können Teilnehmer*innen nicht ableiten, ist unbedingt das Grundverständnis für die Multiplikation weiter auszubauen.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Vor der Beschäftigung mit der Operationslogik der Multiplikation müssen die Teilnehmer*innen wissen, dass Zahlen Anzahlen beschreiben (*kardinaler Zahlbegriff*). Außerdem sollten sie, aufgrund des operationalen Zusammenhangs, die Operationslogik der Addition und Subtraktion verstanden haben. Da die Teilnehmer*innen sich zur Lösung von Aufgaben des kleinen Einmaleins im Zahlbereich bis 100 bewegen müssen, soll einerseits der Zahlaufbau zweistelliger Zahlen verstanden sein und andererseits muss sicher bis 100 addiert und subtrahiert werden können.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  - Stufe 2 – Operationslogik der Multiplikation, S. 102–106
  - Stufe 2 – Erwerb des kleinen Einmaleins, S. 102–106
  - Stufe 2 – Multiplikation mit mehrstelligen Zahlen, S. 107 ff
- Meyerhöfer, Wolfram; Guther, Alina; Grütte, Dagmar; Weilke, Cornelia (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen: Praxismaterial. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  - Stufe 1 – Kapitel 3, S. 17

  https://www.grundbildung.de/unterrichten

V Welche Materialien werden benötigt?

- *Kursgespräch und Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation:*
  Für jedes Team 15 Gegenstände (Steckwürfel, Wendeplättchen, Stifte, Büroklammern o. ä.)
- *Kursgespräch – Zehnmal:*
  Pro Kursteilnehmer*in ein laminiertes Hunderterfeld, ein Folienstift und ein Abdeckwinkel aus Papier oder Karton
- *Spiel Einmaleins würfeln:*
  - *Je Zweierteam einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 10, einen Sechserwürfel und Klebezettel (zum Bekleben und Beschriften des Sechserwürfels)*
  - *eventuell Spielgeld*

13.1 Die Operationslogik der Multiplikation

EXPLORATION

Das nachfolgende Kursgespräch und die Partnerarbeit sollen die Teilnehmer*innen in die Lage versetzen, Mal-Aufgaben in Mengenhandlungen zu übersetzen. Es wird deutlich, dass bei einer multiplikativen Mengenhandlung eine Menge mehrfach vorhanden ist – die Menge wird vervielfacht. An der Mengenhandlung wird weiteres Wissen um die Operationslogik der Multiplikation verdeutlicht:

- Welche Frage beantworten Multiplikationsaufgaben?
- Welche Gleichungen passen zur vorgespielten Handlung?
- Welche Plus- und welche Mal-Aufgaben passen zur Handlung?
- Welche unterschiedliche Bedeutung haben der erste und der zweite Faktor?
- Wie wirkt sich ein Tausch der Faktoren auf die Mengenhandlung aus?

Ähnlich wie bei der Addition und Subtraktion soll das Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation* einerseits der Vorbereitung der sich anschließenden Partnerübung dienen, andererseits auch grundlegende Einsichten bezüglich der Operationslogik der Multiplikation hervorbringen. Diese werden dann während der nachfolgenden Übung vertieft. Während der Übung hat die Kursleitung die Möglichkeit zu überprüfen, ob alle Teilnehmer*innen die wichtigen Erkenntnisschritte mitgegangen und somit für die nächsten Erkenntnisschritte, zum Herleiten und Automatisieren des kleinen Einmaleins bereit sind.

13.1.1 Kursgespräch – Mengenhandlung Multiplikation

Didaktische Ziele

- Durch aktives Darstellen von Multiplikationsaufgaben (handelnd, bildlich und symbolisch) Verständnis für die Rechenoperation Multiplikation aufbauen/festigen
- Zeitlich-sukzessive und räumlich-simultane Vorstellungen zur Multiplikation aufbauen/festigen
- Die Fachbegriffe der Multiplikation (Faktor und Produkt) kennen und richtig benutzen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

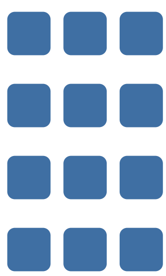
Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, genau zu beobachten, was passiert, sodass sie anschließend beschreiben können, was die Kursleitung getan hat.

Die Kursleitung spielt eine multiplikative Mengenhandlung vor. Dazu können Steckwürfel oder auch andere Gegenstände verwendet werden. Es sind ausreichend große Pausen zwischen den einzelnen Handlungsschritten nötig, damit die Teilnehmer*innen Zeit haben zu erkennen, um welche Menge es bei der Aufgabe gehen soll.

BEISPIEL
für das Vorspielen einer multiplikativen Mengenhandlung:

Die Kursleitung holt drei Steckwürfel aus einem Schrank und legt diese Würfel auf einen Tisch. Dann geht die Kursleitung erneut zum Schrank und holt noch einmal drei Steckwürfel. Das Ganze soll noch zweimal wiederholt werden.

Nun ist die Kursleitung viermal gelaufen und hat jeweils drei Steckwürfel geholt.



Die Teilnehmer*innen beschreiben nun, was sie beobachtet haben. Folgende Fragen sind hilfreich, um die dazugehörigen Additions- und Multiplikationsgleichungen zu finden:

Was habe ich (genau) getan? Und was habe ich danach gemacht?

Welche Frage könnten wir uns jetzt stellen? Wie viele Gegenstände habe ich gebracht?[2]

Wie viele Gegenstände habe ich jedes Mal gebracht?

Wie viele Gegenstände habe ich insgesamt auf den Tisch gelegt?

Welche Gleichung passt zu dieser Aufgabe?

Wenn sofort die Mal-Aufgabe (4 · 3 oder 3 · 4) genannt wird, hilft folgende Frage, um die Operationslogik herauszuarbeiten.

Wie viele Gegenstände sind es insgesamt? Wie haben Sie das gerechnet?

Eine häufige Antwort ist: „Drei plus drei plus drei und noch einmal drei. Das sind dann zwölf."

Wenn die Teilnehmer*innen keine passende Additions- oder Multiplikationsaufgabe nennen, fragt die Kursleitung direkt, welche Plus-Aufgabe zu den Handlungen passt. Bei der Suche nach der Mal-Aufgabe hilft oft die folgende Frage.

Wie kann man diese Plus-Aufgabe kürzer aufschreiben? Wie kann ich leichter rechnen?

Wenn die passende Gleichung gefunden wurde, kann die Kursleitung gemeinsam mit den Teilnehmer*innen überlegen, *warum* sie das eigentlich zusammengerechnet haben. Welche Frage stellt sich nun?

Warum haben Sie das zusammengerechnet? Was erfahren wir, wenn wir die Aufgabe ausrechnen?

Was wissen wir durch das Ergebnis Neues? Was hat uns das Lösen der Aufgabe gebracht? Welche Frage kann man an diese Aufgabe stellen?

Welche Frage ergibt sich aus der Gleichung?

An dieser Stelle können noch keine verallgemeinernden Rückschlüsse (in der Art: „Die Multiplikation fragt immer nach …") erwartet werden bzw. die Kursleitung sollte an diesem Punkt noch nicht die Erkenntnisse zusammenfassen. Den Teilnehmer*innen wird ausreichend Zeit gegeben, um wiederkehrende Zusammenhänge selbst zu entdecken.

Die unterschiedliche Bedeutung der Faktoren

Ist nun deutlich geworden, welche Frage durch die Berechnung der Aufgabe beantwortet wird und welche Plus- und Mal-Aufgabe zur vorgespielten Gleichung passen, können sich die Teilnehmer*innen der unterschiedlichen Bedeutung der Faktoren widmen.[3]

Dazu zurück zur Beispielaufgabe 4 · 3 Steckwürfel = 12 Steckwürfel.

Die Kursleitung erinnert die Teilnehmer*innen an die passende Multiplikationsaufgabe. Dazu wird die Aufgabe an die Tafel geschrieben. Hilfreich ist auch eine Visualisierung der Mengenhandlung – eine Rechenskizze – ähnlich der Abbildung zum Beispiel für das Vorspielen einer multiplikativen Mengenhandlung.

EXKURS FACHTERMINI

Es bietet sich weiter an, mit den Teilnehmer*innen ein Tafelbild über die Fachtermini bezüglich einer Multiplikationsgleichung anzufertigen. Es ist für das Rechnen nicht entscheidend, ob diese Fachworte bekannt sind. Für Teilnehmer*innen ist es aber von Vorteil immer genau zu wissen, über welchen Teil der Mal-Aufgabe gerade gesprochen wird.

Rechenoperation: **Multiplikation**

Verb: **multiplizieren**

Faktor · Faktor = Produkt

1. Faktor   2. Faktor

Folgende Fragen helfen beim Herausstellen der unterschiedlichen Bedeutung der beiden Faktoren (hier am Beispiel der Aufgabe 4 · 3 Steckwürfel = 12 Steckwürfel).

Was sagt uns der erste Faktor? Wofür steht der erste Faktor?

Wo ist die Vier bei den Würfeln? Kann man die Vier/eine Vierermenge sehen?

Was sagt der zweite Faktor? Wofür steht der zweite Faktor?

Welche Rolle spielte die Drei bei der vorgezeigten Handlung mit den Steckwürfeln?

Auswirkung eines Faktorentausches auf die Mengenhandlung

Ist die Erkenntnis gesichert, dass der erste Faktor angibt, wie oft die zweite Zahl da ist, werden die Teilnehmer*innen gefragt, welche Auswirkungen ein Tausch des ersten und des zweiten Faktors zur Folge hat.

Wie muss man die Handlung verändern, wenn die Aufgabe 3 · 4 Steckwürfel lautet? Wie oft müssen wir laufen (um neue Gegenstände zu holen)?

Wie viel muss man bei jedem Mal mitbringen?

Was ändert sich zur Handlung vorher? Und was bleibt gleich?

Hat die Kursleitung den Eindruck, dass jemand schon eine gute Idee hat, kann diese*r gebeten werden, die veränderte Handlung vorzuspielen. Besonders gewinnbringend ist es, wenn aus den Fragen eine Diskussion entsteht, in der sich alle Teilnehmer*innen trauen, ihre Ideen und Vermutungen zu äußern. Werden *falsche* Lösungsideen durch die Kursleitung aufgegriffen, kann z. B. über folgende Aspekte diskutiert werden:

- die Folgen des Faktorentausches,
- die Folgen der Änderung des ersten oder zweiten Faktors.

Die Konsequenzen der falschen Lösung können gemeinsam mit allen Teilnehmer*innen nachvollzogen werden. Damit fühlen sich auch Teilnehmer*innen mit der falschen Lösung wertgeschätzt und gleichzeitig entsteht für alle ein gewinnbringender Austausch über die mathematischen Zusammenhänge.

13.1.2 Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

KOPIERVORLAGEN 1–3

Jeweils zwei Teilnehmer*innen erhalten einen Satz der kopierten (und ausgeschnittenen) **Kopiervorlage 1**. Die Gleichungszettel werden vor dem Team auf den Tisch gelegt. Eine Person zieht einen Gleichungszettel und spielt die darauf notierte Gleichung vor. Anschließend beantwortet die andere Person die Fragen auf den **Kopiervorlagen 2 und 3**.

Den Teilnehmer*innen sollte 30 Minuten Zeit zum gegenseitigen Vorspielen der Aufgaben und zum parallelen Beantworten der Fragen des Aufgabenblattes gegeben werden. Die Kursleitung schaut kurz vor Ablauf der Zeit, ob von den Teilnehmer*innen noch mehr Zeit benötigt wird.

Die Zweierteams sollen sich abwechseln, sodass am Ende der Aufgabe jede*r Teilnehmer*in vier Aufgaben vorgespielt und vier Aufgaben angeschaut hat. Die Kursleitung geht während der Übung von Team zu Team und schaut, ob es noch Teilnehmer*innen gibt, die Probleme mit der Aufgabenstellung oder mathematische Verständnisschwierigkeiten haben. Die Kursleitung kann sich dort einbringen, wo es Probleme gibt und entsprechende Fragen stellen, die den Teilnehmer*innen bei der Lösung der Aufgabe helfen. Die nachfolgend aufgelisteten Fragen müssen an das Verständnisproblem der Teilnehmer*innen angepasst werden.

Fragen zur Unterstützung bei Verständnisproblemen

Bei allgemeinen Verständnisproblemen:

Was hat die andere Person eben getan?
*Versuchen Sie so genau wie möglich zu beschreiben, was Ihr*e Partner*in eben getan hat.*

Bei Problemen mit 1. und 2. Faktor:

Wie oft wurde etwas geholt/getan?
Wie viele Gruppen von Steckwürfeln liegen da? Wie viele Steckwürfelstangen liegen da?
Wie viele Gegenstände hat die Person jedes Mal geholt?
Aus wie vielen Steckwürfel besteht eine Steckwürfelstange? Wie viele Steckwürfel sind immer zu einer Gruppe zusammengesteckt?

Bei Problemen bezüglich der Gesamtmenge bzw. der Lösungsfindung:

Wie viele Gegenstände hat die Person insgesamt geholt?
Wie viele Gegenstände sind jetzt insgesamt da?

Die Kursleitung macht von folgenden Faktoren abhängig, ob im Anschluss noch ein Auswertungsgespräch durchgeführt wird:

- Können alle Teilnehmer*innen die Gleichungen richtig vorspielen?
- Können alle Teilnehmer*innen die Fragen auf den Aufgabenblättern richtig beantworten?
- Haben alle Teilnehmer*innen den Unterschied zwischen der Funktion des ersten und des zweiten Faktors verstanden?
- Können die Teilnehmer*innen Fragen zu den multiplikativen Mengenhandlungen entwickeln?
- Finden die Teilnehmer*innen nicht nur die entsprechende Mal-, sondern auch die passende Plus-Aufgabe zur Handlung?

Wenn ja, kann mit dem Kurs zu den sich anschließenden Unterrichtssequenzen *Einzelarbeit – Rechenskizzen, Gesamt-/Teilmenge und Funktion der Faktoren* übergegangen werden. Sollte es nur leichte Unsicherheiten bei einzelnen Personen geben, kann dennoch inhaltlich vorangegangen und die sich anschließenden Aufgabenblätter können bearbeitet werden. Die Kursleitung sollte sich jedoch in besonderer Weise den inhaltlich noch unsicheren Teilnehmer*innen widmen. Sie unterstützt durch die oben stehenden Fragen die Teilnehmer*innen bei Verständnisproblemen.

Sollte es jedoch mehrheitlich große Verständnisprobleme bezüglich der Multiplikation geben, ist das Vorspielen/Legen weiterer multiplikativer Handlungen sinnvoll. Die Kursleitung unterstützt die Teilnehmer*innen durch entsprechende Fragestellungen, die richtigen und elementaren Einsichten zu erhalten.

KOPIERVORLAGEN 4–5

Es können auch die **Kopiervorlagen 4 und 5** genutzt und damit weitere Multiplikationsgleichungen von den Teilnehmer*innen bearbeitet werden.

Mit jedem Schritt werden die Teilnehmer*innen zunehmend selbstständiger ihr Wissen um die Multiplikation anwenden. Zeigen einzelne Teilnehmer*innen noch immer Unsicherheiten bezüglich der Operationslogik, geht die Kursleitung mit ihnen wieder zurück zur vorhergehenden Übung bzw. zum vorausgegangenen Gespräch, um die dortigen Inhalte abzusichern.

Lernziele zu Kopiervorlagen 2, 3 und 5
In diesem Unterkapitel 13.1.2 sollen die Teilnehmer*innen mit grundlegenden Vorstellungen zur Multiplikation vertraut werden. Dabei geht es nicht primär um das Ergebnis von Multiplikationsaufgaben, sondern darum wie sich diese enaktiv, bildlich und symbolisch darstellen lassen. Bei Kopiervorlage 2 steht die enaktive Darstellung im Vordergrund. Die Teilnehmer*innen sollen handelnd Multiplikationsaufgaben nachspielen und dabei Fragen zu dem Gesehenen beantworten. Dabei steht primär eine zeitlich-sukzessive Vorstellung der Multiplikation im Vordergrund.

Kopiervorlage 3 fördert ebenfalls handelnde Darstellungen, aber auch bildliche. Hier geht es darum Multiplikationsaufgaben mit Steckwürfeln darzustellen. Auch hier geht es nicht primär um das Ergebnis der Multiplikation, sondern um eine eher räumlich-simultane Vorstellung der Multiplikation. Kopiervorlage 5 fokussiert auf einen Spezialfall der räumlich-simultane Vorstellung der Multiplikation, in der auch die Kommutativität deutlich wird. Eine Anordnung in Rechtecksform wäre daher wünschenswert. Aber auch hier geht es primär um die Darstellung multiplikativer Mengenhandlungen und nicht um das Ergebnis von Multiplikationsrechnungen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Bei der Multiplikation wird der immer gleiche Summand addiert. Die Multiplikation ist demnach eine Addition gleicher Summanden.
- Bei einer Multiplikations-Aufgabe wird eine Zahl vervielfacht, d. h. eine Zahl ist nach der Vervielfachung mehrfach vorhanden.
- Bei der Multiplikation wird gefragt: „Wie viele sind es insgesamt?“
- Auch bei einer Additionsaufgabe wird gefragt, wie viele es insgesamt sind. Dabei werden aber auch unterschiedliche Summanden addiert.
- Der erste Faktor gibt an, wie oft die Teilmenge vorhanden ist. Der zweite Faktor gibt die Größe der einzelnen Teilmengen an.

13.1.3 Einzelarbeit und Aufgabenblatt 13.1 a – sprachliche Beschreibungen multiplikativer Mengenhandlungen

Didaktische Ziele

- Bildliche Darstellungen von Multiplikationen interpretieren, passende Malaufgaben dazu finden und sprachlich beschreiben
- Die Rolle der Faktoren sicher unterscheiden

EXPLORATION

In den folgenden Unterrichtssequenzen werden sich die Teilnehmer*innen weitestgehend selbstständig mit multiplikativen Sachsituationen auseinandersetzen mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen.

Im ersten Themenbereich *sprachliche Beschreibungen multiplikativer Mengenhandlungen* sollen bildlichen Darstellungen von multiplikativen Mengenhandlungen die entsprechenden verbalen Beschreibungen zugeordnet werden und anschließende die passende Mal-Aufgabe notiert werden. Dabei geht es auch darum ein entsprechendes Vokabular für multiplikative Situationen kennen zu lernen bzw. zu entwickeln. Dazu sollen die Teilnehmer*innen Aufgabenblatt 13.1 a bearbeiten.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.1 a

Die Kursleitung gibt jeder*m Teilnehmer*in das Aufgabenblatt 13.1 a.

Es wird kurz besprochen worauf es bei den Aufgaben ankommt. Dann wird den Teilnehmer*innen Zeit gegeben das Aufgabenblatt 13.1 a zu bearbeiten. Im Anschluss an die Einzelarbeitsphase geht die Kursleitung alle Aufgaben gemeinsam mit den Teilnehmer*innen durch.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 a
Das Aufgabenblatt 13.1 a fokussiert neben bildlichen Darstellungen von Multiplikationen vor allem auf deren verbaler Beschreibung. Insbesondere Teilnehmer*innen nicht-deutscher Muttersprache sollten mit sprachlichen Beschreibungen (z. B. je, 3mal, in jeder ... gibt es genau ..., etc.) für multiplikative Situationen und Handlungen vertraut werden. Außerdem geht es dabei auch immer darum die passende symbolische Darstellung zur bildlichen bzw. verbalen Beschreibung zu finden, wobei die unterschiedliche Bedeutung der beiden Faktoren eine Rolle spielt.

13.1.4 Kursgespräch Aufgabenblatt 13.1 b und Einzelarbeit Aufgabenblatt 13.1 c – Rechenskizzen

Didaktisches Ziel
Verbal beschriebene Sachsituationen zu multiplikativen Mengenhandlungen in bildliche und symbolische Darstellungen umwandeln

EXPLORATION

Im zweiten Themenbereich *Rechenskizzen* werden Rechenskizzen erstellt. Diese Form der Visualisierung hat sich in der Arbeit mit *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* als äußerst hilfreich erwiesen – vor allem, wenn es den Teilnehmer*innen schwer fällt, die entsprechenden Gleichungen zu einer umschriebenen Sachsituation zu finden. Aus den erstellten Zeichnungen werden die entsprechenden Teilmengen und so auch die Additions-Aufgabe ersichtlich. Mithilfe der Plus-Aufgabe gelingt das Herausarbeiten der passenden Multiplikationsaufgabe leichter. Während des Anfertigens einer Skizze setzen sich die Teilnehmer*innen intensiver mit der Aufgabe auseinander und notieren nicht schnell *irgendeine* Gleichung. Zudem fallen Fehlschlüsse schon bei der Erstellung der Skizzen oder beim Übersetzen in eine Gleichung auf. Dazu wird zuerst **Aufgabenblatt 13.1 b** gemeinsam mit der Kursleitung besprochen und dann **Aufgabenblatt 13.1 c** in Einzelarbeit bearbeitet.

AUFGABENBLATT 13.1 b/c

Die Kursleitung gibt jedem*r Teilnehmer*in das **Aufgabenblatt 13.1 b.**

Die Teilnehmer*innen erhalten zwei Minuten Zeit, sich die Sachsituation und die dazugehörigen Aufgabenstellungen anzuschauen. Anschließend geht die Kursleitung alle Aufgaben gemeinsam mit ihnen durch. Die Kursleitung erfragt, ob es bereits Teilnehmer*innen gibt, die schon Ideen haben, wie die einzelnen Aufgaben zu erledigen bzw. die Fragen zu beantworten sind. Das **Aufgabenblatt 13.1 b** kann gemeinsam mit dem Kurs besprochen und bearbeitet werden, das nachfolgende **Aufgabenblatt 13.1 c** hingegen bearbeiten die Teilnehmer*innen selbstständig.

Rechenskizze
Wesentlich für eine Skizze/Zeichnung ist die Bewusstwerdung darüber, worum es in der Aufgabe geht. Also könnte eine passende Rechenskizze z. B. drei Netze mit jeweils fünf Orangen enthalten. Ebenfalls wäre es möglich, drei Fünfermengen zu zeichnen.

Rechnung Plus-Aufgabe
Eine Rechnung zur beschriebenen Situation bzw. zur Rechenskizze zu finden, kann leichter sein, wenn man dabei an eine Plus-Aufgabe denkt. So können verschiedene Plus-Aufgaben aus der Skizze abgelesen werden. Sollte es beim Zuordnen der Plus-Aufgabe Probleme geben, ist es wahrscheinlich, dass die Operationslogik der Addition noch nicht verstanden wurde und es muss mit der*dem Teilnehmer*in thematisch zurückgegangen werden. Das Verständnis der Operationslogik der Addition ist Voraussetzung für das Verstehen der Multiplikation. Es sollte darauf geachtet werden, dass auf jeden Fall die Plus-Aufgabe, bei der gleiche Summanden addiert werden, genannt wird.

Rechnung Mal-Aufgabe
Das Ermitteln der Mal-Aufgabe ist schwieriger als das Zuordnen der Plus-Aufgabe. Nehmen wir das Beispiel vom **Aufgabenblatt 13.1 a** zu Hilfe. Wahrscheinlich wissen die Teilnehmer*innen, dass es um drei und fünf gehen muss. Aber $5 \cdot 3$ oder $3 \cdot 5$? Können die Teilnehmer*innen das aus ihrer Skizze nicht ablesen, stellt die Kursleitung ähnliche Fragen wie bei der Aufgabe und dem Kursgespräch.

Mengenhandlung Multiplikation:

- „Wie kann die Plus-Aufgabe anders / in kürzerer Form aufgeschrieben werden?“
- „Wie oft würde sie Orangen holen gehen?“
- „Wie viele Orangen würde sie jedes Mal mitbringen?“
- „Sind es 5 · 3 Orangen oder sind es 3 · 5 Orangen ?“

Antwort auf die Frage aus der Sachsituation
Die Kursleitung weist die Teilnehmer*innen darauf hin, dass die Formulierung eines passenden Antwortsatzes leichter fällt, wenn sie sich die Frage vorher noch einmal durchlesen. Das erneute Lesen der Frage kann aber auch dazu führen, dass die Teilnehmer*innen selbst feststellen, dass die berechnete Zahl nicht zur Frage passt.

Die Kursleitung ermutigt die Teilnehmer*innen, auch bei Unsicherheiten ihre Lösungsideen zu notieren. Manchen Menschen fällt es leichter, Antworten mit einem Bleistift aufzuschreiben, wenn sie sich nicht ganz sicher sind.

Wurde das **Aufgabenblatt 13.1 b** erfolgreich erarbeitet, sollen die Teilnehmer*innen das **Aufgabenblatt 13.1 c** allein bearbeiten. Dazu sollten zunächst 15 Minuten Zeit gegeben werden. Anschließend prüft die Kursleitung, ob eine Zeitzugabe erforderlich ist.

Im Anschluss an die fünfzehnminütige Einzelarbeit finden sich jeweils zwei Teilnehmer*innen zusammen und besprechen ihre Ergebnisse. Sie sollen sich – wenn möglich – auf eine Lösung einigen und diese nach zehn Minuten Beratungszeit vorstellen.

Die Kursleitung geht während der Einzel- und der Besprechungszeit der Zweiergruppen zu den Teilnehmer*innen. Dabei schaut sie, ob es Personen gibt, die große Probleme mit der Bearbeitung des Aufgabenblattes haben. Diese Teilnehmer*innen sollten mit entsprechenden Fragestellungen aus dem Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation* unterstützt werden.

Wenn sich die Zweiergruppen beraten haben, kann die Kursleitung, je nach Gruppendynamik, entweder die Ergebnisse durch eine der Zweiergruppen vorstellen lassen oder die Fragen und Antworten mit allen Teilnehmer*innen gemeinsam durchsprechen. Die Kursleitung lässt diverse Rechenskizzen an die Tafel zeichnen. Diese werden schließlich miteinander verglichen.

Die Teilnehmer*innen sollten bei der Vorstellung begründen, wie sie zur Lösung gekommen sind. Wer sicher verstanden hat, worum es geht, kann sein Vorgehen auch erklären. Interessant ist auch, ob andere Teilnehmer*innen bei einer bestimmten Aufgabe andere Ideen hatten. Die Kursleitung sollte nicht nur nachfragen, wenn etwas falsch ist, sondern möglichst bei jeder Antwort – auch den richtigen Antworten – nachhaken und sich die Ergebnisse begründen lassen. Teilnehmer*innen und Kursleitung diskutieren gemeinsam, warum eine Lösungsidee eventuell nicht zum Ziel geführt hat.

Sollte die Kursleitung bemerken, dass einige Teilnehmer*innen
- keine passende Skizze anfertigen können,
- keine Antworten finden oder
- keine Rechnungen zu den Sachsituationen finden,

dann sollte sie weitere Aufgaben in diesem Format entwickeln. Neben Beispielen, die vielleicht im Unterrichtsverlauf aufgetaucht sind, sind mögliche Multiplikationssituationen für die Erstellung weiterer Aufgabenblätter:

BEISPIELE

- Talita geht jede Woche dreimal/achtmal/neunmal joggen. Wie oft war sie innerhalb von vier/sechs/acht Wochen joggen?
- Für eine Kanne Tee braucht man jeweils zwei Teebeutel. Zoe soll fünf/acht/15 Kannen Tee kochen.
- In einer Packung Kaugummi sind immer sechs Streifen. Ella kauft sich sieben/drei/zwölf Packungen.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 b und 13.1 c
Bei den Aufgabenblättern 13.1 b und 13.1 c geht es primär darum, verbale Beschreibungen von multiplikativen Mengenhandlungen in bildliche Darstellungen und schließlich auch in symbolische Darstellungen umzuwandeln.
Bei den bildlichen Darstellungen wäre es entscheidend, dass es den Teilnehmer*innen gelingt diese strukturiert darzustellen, sodass jeweils gleichmächtige Teilmengen gut erkennbar sind. Aus diesen gleichmächtigen Teilmengen sollten sich dann Plus-Aufgaben ergeben, bei denen der gleiche Summand mehrfach addiert wird, was schlussendlich in eine Mal-Aufgabe übergeführt werden sollte. Es sollten aber auch andere passende Rechnungen zugelassen und gegebenenfalls besprochen werden.
Auch hier steht noch nicht das Ergebnis der Multiplikationsaufgabe im Mittelpunkt.

13.1.5 Einzelarbeit Aufgabenblätter 13.1 d und 13.1 e – Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation

Didaktisches Ziel
In multiplikativen Mengenhandlungen gleichmächtige Teilmengen und die Anzahl dieser Teilmengen unterscheiden (zur Festigung der unterschiedlichen Bedeutungen der beiden Faktoren und des Zusammenhangs von Plus und Mal)

Mithilfe der Aufgabenblätter 13.1 d und 13.1 e werden sich die Teilnehmer*innen intensiver mit den Gesamt- und Teilmengen beschäftigen. Im Unterschied zur Addition und Subtraktion sind bei der Multiplikation die einzelnen Teilmengen nicht mehr direkt aus der Gleichung ablesbar. Die multiplikative Mengenhandlung ist schwerer aus der Gleichung abzulesen als bei Additions- und Subtraktions-Aufgaben. Die Beschäftigung mit Gesamt- und Teilmengen wird zu einem tieferen Verständnis der Multiplikation führen. Auch das Herleiten der Aufgaben des kleinen Einmaleins und das spätere Multiplizieren werden durch die Beschäftigung mit den verschiedenen Aspekten der Operationslogik erleichtert.

In den vorangegangenen Unterrichtseinheiten haben sich die Teilnehmer*innen mit dem Zusammenhang von Addition und Multiplikation beschäftigt und wurden darüber hinaus in das Arbeiten mit Rechenskizzen eingeführt. Das vorliegende Unterrichtskonzept beschäftigt sich mit Gesamt- und Teilmengen bei Multiplikationsaufgaben. Das Wissen darum, wie groß die Gesamt- und Teilmengen bei einer Mal-Aufgabe sind, wird es den Teilnehmer*innen erleichtern, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Mal-Aufgaben zu entdecken.

Sobald den Teilnehmer*innen z. B. bewusst ist, wie die Aufgabe $5 \cdot 6$ mit der Aufgabe $6 \cdot 6$, aber auch mit der Aufgabe $4 \cdot 6$ in Zusammenhang steht, werden sie Aufgaben flexibler ableiten. Ein schnelles, sicheres und flexibles Wissen um das Herleiten von Aufgaben des Einmaleins führt dazu, dass das Einmaleins schneller routinisiert wird und vermutete Ergebnisse kurzfristig auf Richtigkeit überprüft werden können.

Bevor die Teilnehmer*innen sich intensiv mit den Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation beschäftigt haben, besteht häufig die Vermutung, dass vier und drei bei der Aufgabe $4 \cdot 3$ die Teilmengen sind. Ist nicht geklärt, dass bei dieser Aufgabe die Teilmengen drei, drei, drei und drei sind ($4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$), ist auch nicht erklärbar, wie $4 \cdot 3$ zusammen zwölf sein soll, denn vier *und* drei sind zusammen sieben ($4 + 3 = 7$). Besteht die Vermutung, dass vier und drei die Teilmengen sind, ist auch nicht von $4 \cdot 3$ auf $5 \cdot 3$ zu schließen: Es kann nicht erklärt werden, dass von $4 \cdot 3$ $(3 + 3 + 3 + 3)$ zu $5 \cdot 3$ $(3 + 3 + 3 + 3 + 3)$ eine Drei addiert werden muss.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.1 d

Jede*r Teilnehmer*in erhält ein **Aufgabenblatt 13.1 d.** Es wird ausreichend Zeit gegeben, um die Sachsituation und die dazugehörigen Aufgabenstellungen durchzulesen. Anschließend geht die Kursleitung das Aufgabenblatt gemeinsam mit den Teilnehmer*innen durch.

Worauf bei den Punkten *Rechenskizze* zu achten ist, wurde bereits in der *Einzelarbeit – Rechenskizzen* erläutert. Hinzu kommen im vorliegenden Unterrichtskonzept, mit den **Aufgabenblättern 13.1 d – 13.1e,** die Fragen nach den Teilmengen und der Gesamtmenge.

Gesamtmenge
Das Wort *Gesamtmenge* beschreibt jene Menge, die nach der Vervielfachung einer Zahl, also einer Multiplikation vorliegt. Mit den nachfolgenden Fragen kann die Kursleitung den Teilnehmer*innen beim Erschließen des Begriffes Gesamtmenge bzw. bei der Übertragung des Begriffes auf die Operationslogik der Multiplikation helfen:

Wie viele sind es insgesamt?
Wie viele sind es zusammen?
Wie viele sind es, wenn man die Vervielfachung durchgeführt hat?
Wie viele sind es, wenn man alle(s) zusammenzählt?

Die Frage nach der Gesamtmenge ist leichter zu beantworten, wenn die Teilnehmer*innen bereits Rechenskizzen anfertigen und die passenden Plus-Aufgaben zur Handlung benennen können. Um die Gesamtmenge zu finden, muss gewusst werden, was bei dieser Aufgabe berechnet werden soll. Sollen z.B. die Kekse oder etwas ganz anderes ausgerechnet werden?

AUFGABENBLATT 13.1 e

Teilmengen
Das Herausarbeiten der Teilmengen ist unserer Erfahrung nach etwas schwieriger als das Finden der Gesamtmenge. Um die Frage nach den Teilmengen zu beantworten müssen die Teilnehmer*innen wissen, was zusammengerechnet werden soll (Kekse, Fliesen, …, etc.) und aus welchen Teilen sich die Gesamtmenge zusammensetzt.

BEISPIEL
Frieda backt drei Backbleche mit jeweils 8 Keksen. Sie backt somit 8 Kekse, noch einmal 8 Kekse und dann noch einmal 8 Kekse (8 Kekse + 8 Kekse + 8 Kekse = 24 Kekse). Die Teilmengen lauten also acht, acht und acht.

Es könnte fälschlicherweise angenommen werden, die Teilmengen wären einfach die beiden Faktoren. Im Keksbeispiel würden dann drei und acht als Teilmengen genannt. Bei diesem Fehlschluss kann die Kursleitung zeichnerisch oder mit Material (Steckwürfel, Wendeplättchen o. ä.) veranschaulichen, dass dies nicht sein kann. Frieda hätte, wenn drei und acht die Teilmengen wären, nur drei und acht Kekse gebacken, also zusammen elf. Das stimmt jedoch nicht mit der Sachsituation überein. Die Unterscheidung von erstem Faktor – der Zahl, die sagt, wie oft die Teilmengen vorhanden sind, – und den eigentlichen Teilmengen ist Grundlage eines sicheren Operationsverständnisses.

Folgende Fragen helfen zu verstehen, was eine Teilmenge ist:

Aus welchen Teilen hat sich das Ganze/die Gesamtmenge der 24 Kekse zusammengesetzt?

Woher wissen wir, welche Menge hier vervielfacht werden soll? Wie viele Kekse werden hier vervielfacht?

Woher wissen wir, wie oft hier vervielfacht werden soll?

Wie oft werden die Keksportionen vervielfacht?

Woher wissen wir, welche Menge hier vervielfacht werden soll?

Wie viele Kekse werden hier vervielfacht?

Wie oft werden die Stundenportionen vervielfacht?

Die Teilnehmer*innen erhalten das **Aufgabenblatt 13.1 e.** Für die Bearbeitung können vorerst 15 Minuten Zeit veranschlagt werden. Nach Ablauf der 15 Minuten überprüft die Kursleitung, ob das Zeitfenster ausreichend war.

Sollte es Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung geben, stellt die Kursleitung zusammen mit den Teilnehmer*innen die Sachsituationen mit Material (Steckwürfel, Wendeplättchen, Kugelschreiber o. ä.) nach. Die Kursleitung stellt gezielte Fragen, um bei der Bearbeitung einzelner Punkte zu unterstützen.

Bei der zweiten Sachsituation wurde offengelassen, für wie viele Wochen ein Monat hat. Es werden von den Teilnehmer*innen wahrscheinlich 4 Wochen, möglicherweise aber auch 5 Wochen genannt. Bei der Auswertung können also verschiedene Ideen gesammelt werden.

Die Kursleitung entscheidet, ob sie nach der Einzelarbeitsphase den Zwischenschritt der paarweisen Auswertung einbaut (wie bei den Erläuterungen zum **Aufgabenblatt 13.1 c** beschrieben).

Die Kursleitung macht es von der Gruppendynamik und dem Zeitbudget abhängig, ob sie die Aufgaben mit dem gesamten Kurs durchgeht oder ob die Ergebnisse in Tandems vorgestellt werden.

Die Teilnehmer*innen werden immer dazu aufgefordert, ihre Antworten zu erläutern. Folgende Fragen unterstützen das Erläutern:

Wie und warum sind Sie zu dieser Lösung gekommen?

Könnte nicht auch ... richtig sein?

*Haben die anderen Teilnehmer*innen andere Ideen/Lösungen?*

Bestehen bei den Teilnehmer*innen größere Unsicherheiten, kann die Kursleitung ähnliche Aufgabenblätter entwerfen. Die Inhalte, vor allem das Wissen um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation, das Identifizieren von Gesamt- und Teilmengen und schließlich das Entwickeln einer passenden Gleichung sind unbedingte Voraussetzung für das Routinisieren des Einmaleins. Dieses Wissen muss sicher und gefestigt sein, bevor mit dem Kurs das kleine Einmaleins (siehe *Kapitel 13.2*) erarbeitet wird.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 d und 13.1 e
Die Aufgabenblättern 13.1 d und 13.1 e fokussieren (ausgehend von verbalen und bildlichen Darstellungen) vor allem das Erkennen gleichmächtiger Teilmengen in multiplikativen Mengenhandlungen sowie die Anzahl dieser Teilmengen. Dadurch können die unterschiedlichen Bedeutungen der beiden Faktoren nochmals betont werden.
Aus dem Erkennen gleichmächtiger Teilmengen sollten sich dann Plus-Aufgaben ergeben, bei denen der gleiche Summand mehrfach addiert wird, was schlussendlich in eine Mal-Aufgabe übergeführt werden sollte. Weiters geht es auch um das Erkennen der Gesamtmenge der multiplikativen Mengenhandlung, wobei diese Gesamtmenge auf unterschiedliche Weisen (z. B. als Ergebnis der Plus-Rechnung oder mittels Abzählen etc.) ermittelt werden kann.

13.1.6 Einzelarbeit Aufgabenblätter 13.1 f und 13.1 g – Funktion der Faktoren/Faktorentausch

Didaktisches Ziel
Die unterschiedliche Bedeutung der beiden Faktoren sicher unterscheiden (als Vorbereitung zur richtigen Anwendung von Ableitungsstrategien)

In diesem Unterkapitel setzen sich die Teilnehmer*innen noch intensiver mit der Funktion des ersten und des zweiten Faktors auseinander. Nur wenn sie die unterschiedliche Funktion der beiden Faktoren verstanden haben, ist gesichert, dass sie Mal-Aufgaben problemlos ableiten können und somit das kleine Einmaleins routinisieren.

Gegenstand der nachfolgenden Aufgabenblätter ist die unterschiedliche Rolle der Faktoren in Multiplikationsaufgaben. Die Lösung – die Gesamtmenge – bleibt gleich, egal, welche Zahl die erstgenannte ist, aber die Mengenhandlung ändert sich. Die Unterscheidung des ersten und des zweiten Faktors ist wichtig für die Her- und Ableitung von Aufgaben des Einmaleins. Nur wenn die Teilnehmer*innen sicher wissen, dass bei $4 \cdot 3$ $(3 + 3 + 3 + 3)$ die Drei viermal vorhanden ist, können sie leicht von $4 \cdot 3$ auf $5 \cdot 3$ $(3 + 3 + 3 + 3 \underline{+ 3}$(!)) schließen. Die Teilnehmer*innen schlussfolgern mit diesem Wissen sicher, dass bei $5 \cdot 3$ im Vergleich zu $4 \cdot 3$ nur eine Drei mehr vorhanden ist.

Den Teilnehmer*innen ist an dieser Stelle des Kurses bereits bewusst, dass der erste Faktor angibt, wie oft die Zahl an der Stelle des zweiten Faktors vorhanden ist. Nun stehen die Konsequenzen eines Faktorentausches im Mittelpunkt. Anschließend werden die Teilnehmer*innen aufgefordert, selbst eine Sachsituation zu beschreiben, bei der die Faktoren getauscht wurden.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.1 f

Vor der Bearbeitung des Aufgabenblattes sollte diesmal nicht angekündigt werden, welche Thematik im Fokus des **Aufgabenblattes 13.1 f** steht. Es könnte stattdessen ankündigt werden, dass nun überprüft wird, ob das Wissen um die Mal-Aufgaben bei allen Teilnehmer*innen sicher ist.

Die Fragestellungen nach passenden Rechnungen zur Situation und den Gesamt- und Teilmengen dürften nunmehr kein Problem darstellen, da diese bereits in den vorhergehenden Unterrichtssequenzen abgefragt wurden. Sollte es Teilnehmer*innen geben, die Schwierigkeiten beim Finden der zusammengehörigen Additions- und Multiplikationsaufgaben oder bezüglich der Gesamt- und Teilmengen haben, werden diese Themen erst abgesichert.

Darüber hinaus spricht die Kursleitung mit dem*der Teilnehmer*in über die Aufgaben und ergründet dabei, welcher mathematische Zusammenhang noch nicht verstanden wurde.

Besonderer Fokus liegt nun auf dem Faktorentausch, denn der einzige Unterschied zwischen der oberen und der unteren Aufgabe auf dem **Aufgabenblatt 13.1 f** liegt darin, dass die Faktoren getauscht wurden.

Im Auswertungsgespräch geht es um die wichtigsten Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgaben. Dabei helfen folgende Fragestellungen:

- Was fällt Ihnen bei beiden Aufgaben auf?
- Gibt es Gemeinsamkeiten zwischen der oberen und der unteren Aufgabe? Was ist gleich und was verändert sich?
- Ändert sich die Frage?
- Sehen Ihre Rechenskizzen für die obere Aufgabe anders aus als für die untere Aufgabe?
- Sind die Plus-Aufgaben/Mal-Aufgaben unterschiedlich? Wie unterscheiden sich die Plus-Aufgaben? Wie unterscheiden sich die Mal-Aufgaben?
- Ändert sich die Gesamtmenge? Ändern sich die Teilmengen?

Sollten im Anschluss an die Bearbeitung des **Aufgabenblattes 13.1 f** noch Unsicherheiten bestehen oder sollen Aufgaben für zu Hause mitgegeben werden, kann die Kursleitung weitere Aufgabenblätter in diesem Format erstellen. Die Kursleitung notiert zwei ähnliche Sachsituationen mit getauschten Faktoren, um das Wissen um die Konsequenzen eines Faktorentausches zu festigen.

BEISPIELE
für Rechengeschichten mit vertauschten Faktoren:

- Carlotta isst jeden Tag zwei Scheiben Brot. Wie viele Scheiben hat sie an 7 Tagen insgesamt gegessen?
- Carlotta isst jeden Tag sieben Scheiben Brot. Wie viele Scheiben hat sie dann an zwei Tagen insgesamt gegessen?
- Martin kauft drei Packungen mit Muffins. In den Packungen sind jeweils vier Muffins.
- Martin kauft vier Dreierpacks mit Muffins.

AUFGABENBLATT 13.1 g

Auf dem **Aufgabenblatt 13.1 g** sollen die Teilnehmer*innen eine bereits vorgegebene Sachsituation umschreiben und dabei die Textteile ändern, die einen Faktorentausch anzeigen.

Im sich anschließenden Auswertungsgespräch werden die Teilnehmer*innen ihre unterschiedlichen Ideen zur geänderten Sachsituation vortragen und schließlich gemeinsam mit der Kursleitung überlegen:

Wie ändert sich die Geschichte?

Was ist gleich an den Geschichten?

Was unterscheidet sich bei beiden Geschichten?

Muss die Rechenskizze nach dem Tausch der Faktoren anders aussehen? Ändern sich Frage und Rechnung?

Die selbst geschriebenen Geschichten der Teilnehmer*innen dürften sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden, da ausschließlich die Faktoren getauscht und die dafür wichtigen Stellen in der Geschichte abgeändert werden sollen. Leon muss nun sechs Eierpackungen mit jeweils zehn Eiern kaufen. Die Frage nach der Gesamtmenge der Eier und die Antwort *60* Eier bleiben gleich.

Auch entsprechend dem **Aufgabenblatt 13.1 g** können von der Kursleitung weitere Aufgabenstellungen entwickelt werden. Die Kursleitung beschreibt dafür Sachsituationen, die es den Teilnehmer*innen möglich machen, selbst die Geschichte so umzuschreiben, dass die Faktoren vertauscht sind.

BEISPIELE

In jeder Wohnung wohnen genau zwei Personen. Im Haus gibt es sechs Wohnungen.

Kai ist heute mit vielen Autos Probe gefahren. Er war in fünf Autohäusern und in jedem hat er ein Auto zur Probe gefahren.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 g

Auch in diesem Aufgabenblatt geht es nicht primär um das Ergebnis von Multiplikationsaufgaben, auch wenn durchaus die Gleichheit im Ergebnis von Tauschaufgaben (Aufgaben, in denen die Faktoren getauscht werden) erkannt werden sollte. Auch hier sollen wieder verbale und bildliche Darstellungen helfen eine Vorstellung von multiplikativen Mengenhandlungen aufzubauen. Entscheidend wäre, wenn Teilnehmer*innen erkennen würden, dass die Handlungen und bildlichen wie symbolischen Darstellungen und somit auch die Teilmengen bei Tauschaufgaben unterschiedlich sind, die Gesamtmenge jedoch die gleiche ist.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Ihr Wissen um die Operationslogik der Multiplikation sollte mit der Bearbeitung der **Aufgabenblätter 13.1 a** bis **13.1 g** erweitert und vertieft worden sein.
- Sie sind nun in der Lage, zu Sachsituationen die entsprechenden Multiplikationsaufgaben zu finden. Wenn zuerst die entsprechende Plus-Aufgabe herausgearbeitet wird, hilft das, die korrekte Mal-Aufgabe zu finden.
- Des Weiteren können die Teilnehmer*innen Fragestellungen zu multiplikativen Sachsituationen entwickeln. Die Teilnehmer*innen klären vorab, was sie herausfinden möchten und welche Informationen einer Sachsituation von Relevanz sind.
- Die Teilnehmer*innen können Sachsituationen analysieren und filtern die wichtigen Angaben aus einer Text- oder Sachaufgabe heraus. Darüber hinaus erlesen sie, was sie mit diesen Aufgaben berechnen können.

- Um sich den Umgang mit Mal-Aufgaben in Zukunft zu erleichtern, haben die Teilnehmer*innen gelernt, Rechenskizzen zu Sachsituationen anzufertigen. Durch das Anfertigen von Skizzen setzen sich die Teilnehmer*innen intensiver mit den Mengen und der Handlung auseinander, bevor eine Gleichung notiert und berechnet wird.
- Die Teilnehmer*innen können sicher Gesamt- und Teilmengen in Mal-Aufgaben benennen. Dies ist Grundlage für die Herleitung von Mal-Aufgaben. Bei der Herleitung von Aufgaben des Einmaleins ist es wichtig zu wissen, welche Zahl zu $4 \cdot 3$ hinzugefügt wird, um $5 \cdot 3$ zu ermitteln.
- Für die Routinisierung des Einmaleins ist es außerdem von Vorteil zu erkennen, wie sich ein Faktorentausch auf die Sachsituation auswirkt.

13.2 Das kleine Einmaleins

Didaktisches Ziel
Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben als Kernaufgaben für Ableitungsstrategien herleiten und automatisieren

EXPLORATION

In den folgenden Unterrichtsgesprächen und Einzelarbeitszeiten wird mit den Teilnehmer*innen erarbeitet, wie sie Mal-Aufgaben ableiten können. Das kleine Einmaleins wird nicht Reihe für Reihe auswendig gelernt, sondern die Teilnehmer*innen werden mit ihrem vorhandenen Wissen um die Operationslogik der Multiplikation zukünftig alle Aufgaben berechnen können. Nach mehrmaligem Herleiten der Aufgaben routinisieren die Teilnehmer*innen i. d. R. das kleine Einmaleins.

In einem ersten Schritt werden die eventuell schon bekannten und zum Herleiten besonders wichtigen Mal-Aufgaben besprochen – die Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben. Diese kann man als Kernaufgaben oder Ankeraufgaben für alle weiteren Malaufgaben verstehen. Viele Teilnehmer*innen wissen schon die Antwort auf die Frage „Wie viel ist zehnmal fünf?". Trotzdem ist es für die dauerhafte Automatisation hilfreich zu wissen, wie diese Lösung zustande kommt. Nur so sind sie in der Lage, bei Unsicherheit Ergebnisse zu überprüfen, indem sie Multiplikations-Aufgaben ableiten. Die Teilnehmer*innen werden am Ende dieses Kurses also nicht nur wissen, dass 10 · 5 insgesamt 50 sind, sondern auch, warum dies so ist.

Haben sie die Logik des Ableitens verstanden, werden sie später auch Aufgaben mit großen Faktoren berechnen können. Dazu ein Beispiel: Wenn bekannt ist, was bei der Verzehnfachung einer Zahl passiert, können die Teilnehmer*innen später auch Aufgaben wie 10 · 18 berechnen.

Nach der Beschäftigung mit Zehnmal-Aufgaben wird die Berechnung von Zweimal-Aufgaben näher betrachtet. Zweimal-Aufgaben sind deshalb einfach zu berechnen, weil die Zahlen *nur* verdoppelt werden, was bei der Addition im Zahlenraum 20 bereits thematisiert wurde. Diese Verdoppelung wird Gegenstand des Kursgespräches *Zweimal* und der Einzelarbeit *Zehnmal- und Zweimal-Aufgaben* sein.

Auch die Fünfmal-Aufgaben sind einigen Teilnehmer*innen bereits bekannt. Für diese wird anschließend ein Weg zur Herleitung erarbeitet.

Die anderen Mal-Aufgaben (z. B. Dreimal-Aufgaben, Achtmal-Aufgaben usw.) können schließlich mit dem Wissen um die Zehnmal-, Zweimal-, Fünfmal- und Einmal-Aufgaben abgeleitet werden. Mithilfe des Wissens um die Operationslogik der Multiplikation werden alle Aufgaben des Einmaleins her- bzw. abgeleitet.[4]

Die Teilnehmer*innen sind in den nachfolgenden Stunden aufgefordert, möglichst viele mathematische Zusammenhänge selbst zu entdecken. Für die Zahlen Eins bis Fünf stehen Vorlagen für Mengenbilder zur Verfügung. Die Zahlen Sechs bis Zehn setzen die Teilnehmer*innen aus den vorliegenden Mengenbildern der Zahlen Eins bis Fünf zusammen. Mit diesen Mengenbildern werden Mal-Aufgaben visualisiert, sodass die Teilnehmer*innen Strukturen erkennen können, die für das Ableiten der Mal-Aufgaben wichtig sind.

13.2.1 Kursgespräch – Zehnmal

Didaktisches Ziel
Mengen im Hunderterfeld verzehnfachen und über den Faktorentausch Zehner im Hunderterfeld erkennen (z. B. 10 · 3 = 3 · 10)

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung stellt allen Teilnehmer*innen ein laminiertes Hunderterfeld[5] zur Verfügung. In dieses können Mal-Aufgaben eingezeichnet werden. Werden Mal-Aufgaben in ein Hunderterfeld eingezeichnet, ist besonders der Faktorentausch gut nachzuvollziehen.

Herausarbeitung der Gesamt- und Teilmengen

Die Kursleitung bittet alle Teilnehmer*innen, zehnmal die Drei (10 · 3) in das Hunderterfeld einzuzeichnen.

Nach dem Einzeichnen könnte die Anordnung wie folgt aussehen.

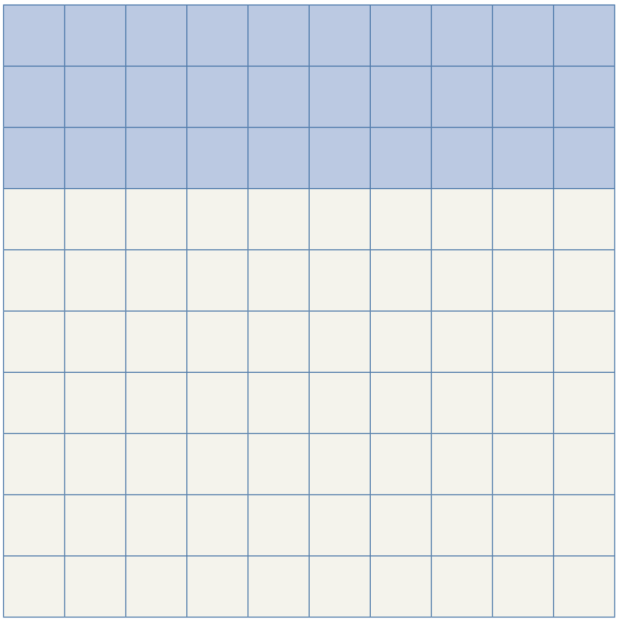


Abbildung 13.2-1 Waagerechte Kennzeichnung von 10 · 3 in einem Hunderterfeld

Die Dreiermengen wurden jeweils senkrecht eingezeichnet. Es sind zehn Dreiermengen eingezeichnet. Sollten die Teilnehmer*innen die Dreier durcheinander gemalt haben, werden sie gebeten, immer eine Dreiermenge in eine Zeile oder in eine Spalte zu zeichnen. Es ist auch möglich, die Dreiermengen waagerecht einzuzeichnen.

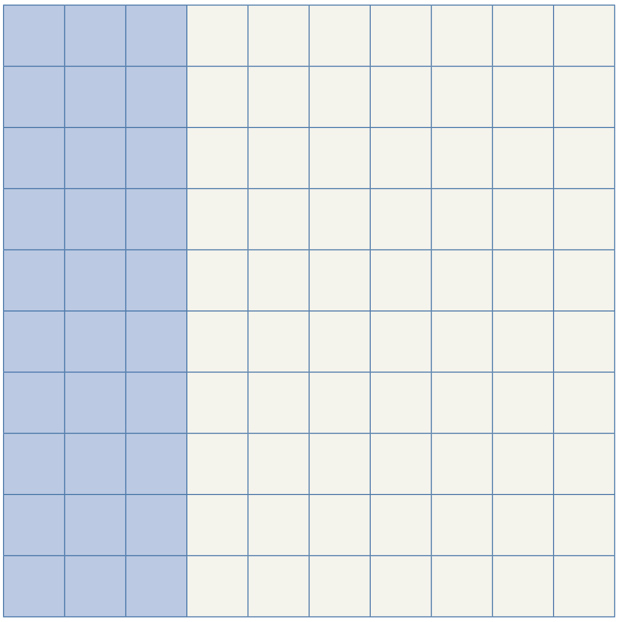


Abbildung 13.2-2 Senkrechte Kennzeichnung von 10 · 3 in einem Hunderterfeld

Bleiben wir beim ersten Beispiel – die Dreiermengen wurden waagerecht eingezeichnet.

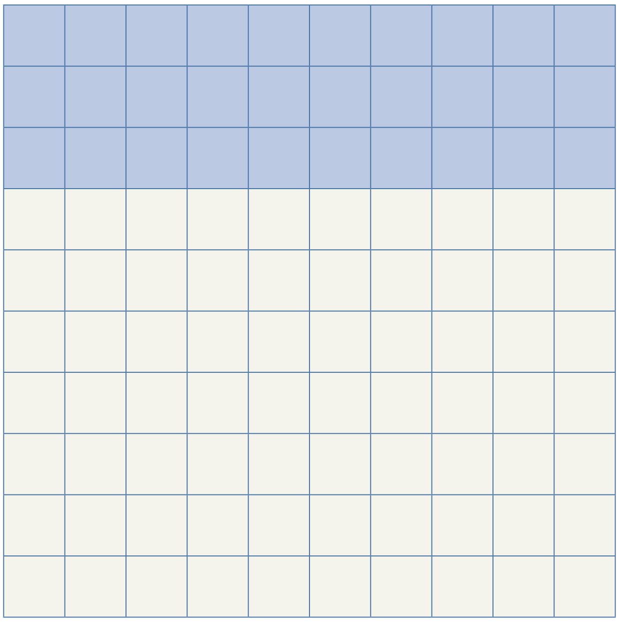
Mögliche Fragen der Kursleitung an die Teilnehmer*innen zur Herausarbeitung der Gesamt- und Teilmengen sind:

Wie viel sind 10 · 3 insgesamt?

Kann man im Hunderterfeld leicht erkennen, dass 10 · 3 insgesamt 30 sind? Woran kann man sehen, dass es insgesamt 30 sind?

Wie viele Kästchen/Punkte haben Sie insgesamt eingezeichnet?

Was können Sie in dieser Anordnung (alle Dreier in einer Linie nebeneinander) gut erkennen?



$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
$= 10 \cdot 3 = 30$

Abbildung 13.2-3 Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe 10 · 3 in einem Hunderterfeld

Die Dreiermenge ist zehnmal vorhanden. Alle Teilnehmer*innen haben die entsprechende Mengenhandlung durchgeführt, indem sie die Drei zehnmal eingezeichnet haben. Sie haben dabei die Dreiermenge vervielfacht. Zudem ist am Hunderterfeld gut zu erkennen, dass bei der Multiplikation die Gesamtmenge gesucht wird, denn es wurden insgesamt 30 Punkte/Kästchen eingezeichnet.

Anwendung des Faktorentausches

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen:

> *Wie heißt die Malaufgabe, wenn ich nun die waagerechten Mengen betrachte?*
>
> *Welche Malaufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die waagerechten Mengen betrachten?*

Nun werden die Mengen betrachtet, die waagerecht in einer Reihe sind. Das sind jeweils zehn. Von den waagerechten Zehnern sind insgesamt drei vorhanden. Also: 3 · 10 = 30. Wenn zehnmal die Drei vorhanden ist, lassen sich im Umkehrschluss auch dreimal die Zehn – drei Zehner – finden.

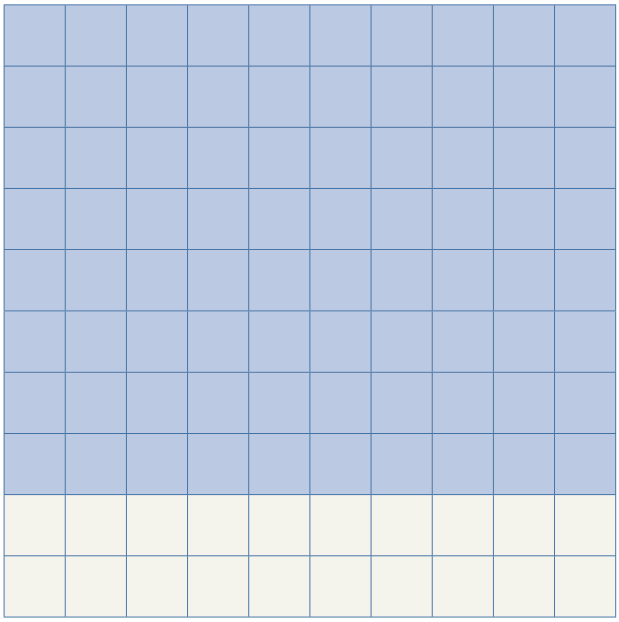
Der soeben beschriebene Zusammenhang kann mit allen Zehnmal-Aufgaben verdeutlicht werden, sobald die Mengen in geordnete Reihen gelegt werden. Sobald eine Zahl zehnmal vorhanden ist, sind entsprechend der Zahl, die verzehnfacht wurde, gleich viele Zehner vorhanden.

10 · 5 = 5 · 10 = fünf Zehner
10 · 9 = 9 · 10 = neun Zehner

Weitere Beispiele eines Faktorentausches bei Zehnmal-Aufgaben

Es ist empfehlenswert, noch mindestens ein weiteres Beispiel für den Faktorentausch bei einer Verzehnfachung zu betrachten. Der Zusammenhang wird auf dem **Aufgabenblatt 13.2 a** zu einem späteren Zeitpunkt in diesem Unterrichtskonzept noch weiter vertieft.

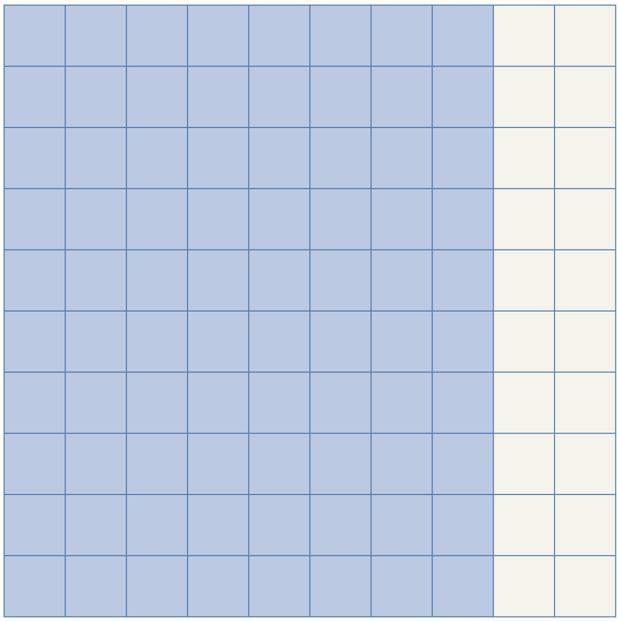
Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen auf, eine Achtermenge in eine Spalte des Hunderterfeldes zu zeichnen. Anschließend soll diese Achtermenge verzehnfacht werden. Die Teilnehmer*innen haben 10 · 8 Kästchen angemalt.



8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8
= 10 · 8 = 80

Abbildung 13.2-4 Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe 10 · 8 in einem Hunderterfeld

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, das Blatt einmal (um 90 Grad/um ein Viertel) zu drehen. Nach der Drehung ist zu erkennen, dass in jeder Spalte zehn Einer sind.



10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10
= 8 · 10 = 80

Abbildung 13.2-5 Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe 8 · 10 in einem Hunderterfeld

Die Kursleitung fasst zusammen.

Wenn zehnmal die Acht vorhanden ist, müssen auch acht Zehner vorhanden sein.

Die Kursleitung schätzt ab, ob weitere Übungen erforderlich sind oder ob thematisch zur nachfolgenden Unterrichtssequenz Zweimal-Aufgaben übergegangen werden kann.

Wichtig ist die Erkenntnis, dass bei Zehnmal-Aufgaben entsprechend viele Zehner vorhanden sind. Denn zehnmal die Sechs heißt auch, es ist sechsmal die Zehn vorhanden, also sechs Zehner (= 60). Dieser Zusammenhang sollte den Teilnehmer*innen an der Arbeit mit dem Hunderterfeld deutlich geworden sein. Es soll ein Verständnis geschaffen werden, das über „man muss nur eine Null anhängen“ hinausgeht.

13.2.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt 13.2 a – Zweimal

Didaktisches Ziel
Zweimal-Aufgaben als additive Verdoppelungsaufgabe verstehen (z. B. 2 · 8 = 8 + 8)

In diesem Kursgespräch werden Zweimal-Aufgaben erarbeitet und berechnet. Die Teilnehmer*innen sollen verstehen, dass jede Zweimal-Aufgabe den Auftrag zur Verdoppelung der Ausgangszahl enthält. Die Kursleitung gibt den Auftrag, Zweimal-Aufgaben, wie z. B. 2 · 5 oder 2 · 8 als Plusaufgabe aufzuschreiben, also 2 · 5 = 5 + 5 oder 2 · 8 = 8 + 8, etc.

An dieser Stelle geht es noch nicht um das Berechnen der Ergebnisse, sondern vorerst um das Entdecken des Zusammenhangs der Addition von zwei gleichen Summanden zum Zweimalnehmen.

Danach fragt die Kursleitung die Teilnehmer*innen:

Wie kann man Aufgaben ausrechnen, bei denen etwas zweimal vorhanden ist?

Geht das auch bei großen Zahlen? Zum Beispiel bei 2 · 3000 oder 2 · 4 Millionen?

Die Teilnehmer*innen sollen verstehen, dass zweimal nehmen und die additive Verdoppelung einer Zahl dasselbe sind. Formal kann das wie folgt formuliert werden: $2 \cdot x = x + x$.

In der Folge geht es darum, dass die Teilnehmer*innen alle Zweimal-Aufgaben schnell berechnen können, weil sie das Prinzip der Verdoppelung verstanden haben und die Strategien der additiven Verdoppelung als Hilfe nutzen können.

Am **Aufgabenblatt 13.2 a** können Teilnehmer*innen bei Bedarf den Zusammenhang von Plus und Mal an Mengendarstellungen im Zwanzigerfeld festigen und üben.

13.2.3 Kursgespräch – Fünfmal

Didaktisches Ziel
Fünfmal-Aufgaben als die Hälfte der Zehnmal-Aufgaben der gleichen Zahl verstehen

Auch *Fünfmal-Aufgaben* sind eine wichtige Grundlage zum Ableiten von Einmaleins-Aufgaben. Die *Fünferreihe* ist als *Malreihe*[6], ebenso wie die *Zehner- und Zweierreihe* in der Regel einfach und rasch zu automatisieren, aber hier muss erstmals ein Ableitungszusammenhang verstanden und verwendet werden. Um *Fünfmal-Aufgaben* zu berechnen, wird die Gesamtmenge einer Zehnermultiplikation halbiert. Denn die Besonderheit bei Fünfmal-Aufgaben ist, dass die Gesamtmenge einer Fünfmal-Aufgabe immer genau die Hälfte der Zehnmal-Aufgabe der gleichen Zahl ist. Das ist für die meisten, die das Einmaleins über das Memorieren von Reihen erlernt haben, ein neuer Gedanke. Dafür ein Beispiel:

10 · 4 = 40 → deshalb ist 5 · 4 = 20 (■) → weil in 10 · 4 einmal 5 · 4 (■) und noch einmal 5 · 4 (◆) enthalten sind (s. Abbildung 13.2-6).

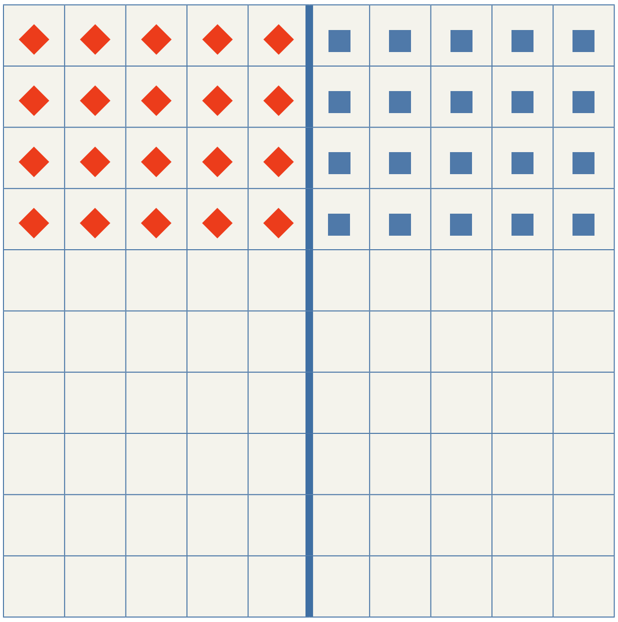


Abbildung 13.2-6

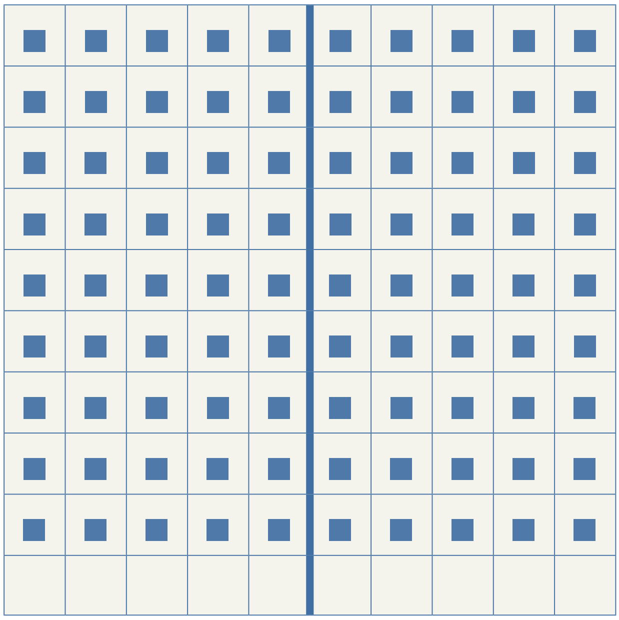


Abbildung 13.2-7

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Um dies zu veranschaulichen, zeichnet die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen eine Zehnmal-Aufgabe in das Hunderterfeld. Sollte der Kurs zu groß sein, kann die Kursleitung die Mengen auch an die Tafel zeichnen oder einen Overheadprojektor benutzen. Zum Beispiel könnte viermal zehn, wie in der obigen Abbildung 13.2-6, eingezeichnet werden. Die Menge soll anschließend so geteilt werden, dass die Zehner in Fünf und Fünf getrennt sind.

Nachfolgend ein weiteres Beispiel. Die Kursleitung zeichnet erneut mit dem Kurs eine Zehnmal-Aufgabe in ein Hunderterfeld: z. B. zehnmal die Neun ($10 \cdot 9$) bzw. neunmal zehn[7] ($9 \cdot 10$).

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, einen Strich senkrecht und mittig durch das Hunderterfeld zu ziehen. Die Kursleitung fragt:

Welche Malaufgabe sehen Sie nun auf der linken Seite der Linie?

Welche Malaufgabe sehen Sie auf der rechten Seite der Linie?

Sind rechts und links unterschiedlich oder sind gleich viele Kästchen gekennzeichnet?

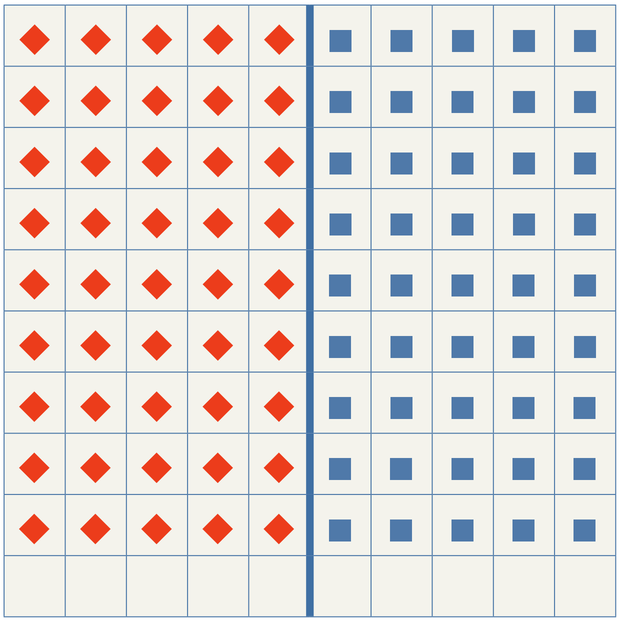


Abbildung 13.2-8

Wenn die Teilnehmer*innen erkannt haben, dass nun die Aufgaben 5 · 9 (◆) und 5 · 9 (■), bzw. 9 · 5 (◆) und 9 · 5 (■), zu sehen sind, erfragt die Kursleitung, wie viele Punkte/Quadrate nun in dem einen und dem anderen Feld sein müssen. Hierbei ist es wichtig zu erkennen, dass in beiden Hälften genau gleich viele Punkte sind. Die Gesamtmenge wurde genau halbiert.

Die Kursleitung lässt im Anschluss die Teilnehmer*innen selbstständig eine Aufgabe finden, mit der sie zeigen können, dass fünfmal die Hälfte von zehnmal sein muss.

Es ist zwar schnell erklärt, wie man von Zehnmal-Aufgaben zu Fünfmal-Aufgaben gelangt, wirklich sicher ist das Wissen jedoch erst, wenn die*der Teilnehmer*in den Zusammenhang (eventuell mehrfach) selbst entdeckt und mehrmals selbstständig mit dem Sachverhalt umgeht.

Die wichtigsten Erkenntnisse zu diesem Zeitpunkt sind:

Bei der mittigen Zerlegung einer verzehnfachten Menge wird die Gesamtmenge genau halbiert.

Ist die Gesamtmenge halbiert, ist zu erkennen, dass in einer Zehnmal-Aufgabe genau zwei Fünfmal-Aufgaben enthalten sind.

$$10 \cdot 9 = 5 \cdot 9 + 5 \cdot 9$$
$$90 = 45 + 45$$

Demnach muss die Fünfmal-Aufgabe einer Zahl genau die Hälfte der Zehnmal-Aufgabe der gleichen Zahl sein.

13.2.4 Einzelarbeit und Aufgabenblätter 13.2 b und 13.2 c – Fünfmal-Aufgaben

Didaktisches Ziel
Fünfmal-Aufgaben aus Zehnmal-Aufgaben ableiten

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.2 b / c

Alle Aufgabenblätter legen den Fokus auf die Mengenbetrachtung bei Mal-Aufgaben. Es ist nicht entscheidend, wie schnell die Lösungen berechnet werden. Vielmehr sollen die Teilnehmer*innen verstehen, dass in einer Zehnmal-Aufgabe zwei Fünfmal-Aufgaben enthalten sind und dass sie deshalb nur die Gesamtmenge der Zehnmal-Aufgabe halbieren müssen. So erfahren sie, wie viele es insgesamt sind, wenn sie eine Zahl fünfmal haben.

Die Kursleitung achtet darauf, dass alle Teilnehmer*innen die Aufgabenstellung verstanden haben. Die Fragestellungen werden gemeinsam mit den Teilnehmer*innen durchgegangen, ohne jedoch bereits Lösungen zu nennen. Die Kursleitung erinnert die Teilnehmer*innen daran, Fragen zu stellen, falls sie etwas nicht verstanden haben.

Die Bearbeitungszeit je Aufgabenblatt wird zwischen zehn und 15 Minuten betragen. Es wird vorerst nur ein Aufgabenblatt ausgegeben und im Anschluss an die Bearbeitung werden die Lösungen im Kurs besprochen. Wenn die Gruppendynamik es zulässt, finden sich nach der Bearbeitung Zweiergruppen zusammen. Sie vergleichen ihre Lösungen miteinander und besprechen diese.

Die Teilnehmer*innen werden immer wieder aufgefordert, ihre Lösungen zu begründen. Wenn nötig, kann die Kursleitung auch falsche Behauptungen aufstellen, um eine Diskussion anzustoßen. Die Kursleitung behauptet z. B.:

Im linken Kasten sind eindeutig mehr Kreise als Quadrate als im rechten Kasten.
Im linken und rechten Kasten sind unterschiedliche Aufgaben eingezeichnet.

Man muss immer nochmal nachzählen, ob die verfünffachte Menge wirklich die Hälfte der zehnfachen Menge ist.

Es besteht für die Kursleitung die Möglichkeit, ähnliche Aufgabenblätter zu erstellen. Dafür sind die **Kopiervorlagen 9** und **10** vorgesehen.

13.2.5 Routinisierungsaufgabe – Einmaleins – Kernaufgaben würfeln

Didaktisches Ziel
Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben: Ableitungen wiederholen und Ergebnisse spielerisch automatisieren

Die Teilnehmer*innen bilden Zweiergruppen. Jede Gruppe erhält zwei Würfel, einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 10 und einen Würfel, auf den die Zahlen 2, 5 und 10 geklebt wurden. Dazu können Notizklebezettel oder normales Papier, das mit Klebestreifen am Würfel befestigt wird, genutzt werden.

Wenn die Teilnehmer*innen würfeln, bekommen sie immer eine Aufgabe in Kombination aus:

2 · irgendeine Zahl (1 bis 10)
5 · irgendeine Zahl (1 bis 10)
10 · irgendeine Zahl (1 bis 10)

Der gebastelte Würfel mit den Zahlen 2, 5 und 10 ist immer (!) der erste Faktor. Es kann demnach nicht die Aufgabe 7 · 10, sondern nur die Aufgabe 10 · 7 gewürfelt werden. Diese Festlegung, welcher der erste und welcher der zweite Faktor ist, wird verhindern, dass Teilnehmer*innen bestimmte Herleitungen vermeiden. Werden einige Wege der Ableitung vermieden, besteht i. d. R. eine Wissenslücke. Können die Teilnehmer*innen hingegen flexibel herleiten, weil sie alle Zusammenhänge verstanden haben, werden sie immer den schnelleren Weg nutzen.

Nun werden abwechselnd Aufgaben gewürfelt und anschließend berechnet. Es sollte nicht nur die Lösung gesagt werden, sondern immer auch, wie diese Aufgabe berechnet werden kann, wenn man das Ergebnis nicht weiß. Die Teilnehmer*innen sollen die Herleitung der Zweimal-, Fünfmal- und Zehnmal-Aufgaben üben. Sollten die Teilnehmer*innen Schwierigkeiten haben, den Rechenweg zu formulieren, hilft die Vorstellung, die Aufgabe jemandem erklären zu müssen, der die Aufgabe nicht lösen kann. Sind die Teilnehmer*innen im Formulieren des Rechenweges geübt, werden sie schon während des Herleitens ihren Rechenweg beschreiben – sie denken laut.

Nach der Herleitung der Mal-Aufgabe wird die Gesamtmenge notiert.

Nun würfelt die zweite Person auch eine Aufgabe und löst diese. Auch hier sollte erklärt werden, wie zur Lösung gekommen wurde bzw. wie die Aufgabe gelöst werden kann, wenn man die Lösung noch nicht weiß.

Schließlich berechnet der*die Mitspieler*in mit der größeren Zahl den Unterschied zwischen den gewürfelten Zahlen und erhält diese als Punkte. Anstatt in Form von Punkten, kann der Unterschied auch mit Spielgeld ausgezahlt werden.

Nachfolgend eine Spielanleitung für den Kurs und ein praktisches Beispiel zu diesem Spiel.

SPIELABLAUF: 1 · 1-WÜRFELSPIEL

- Spieler*in 1 würfelt und rechnet die Mal-Aufgabe aus.
- Spieler*in 1 erklärt, wie man diese Aufgabe errechnen kann.
- Spieler*in 2 würfelt und rechnet die Mal-Aufgabe aus.
- Spieler*in 2 erklärt, wie diese Aufgabe ausgerechnet werden kann.
- Die Spieler*innen vergleichen ihre erwürfelten Zahlen.
- Der*Die Spieler*in mit der größeren Zahl errechnet den Unterschied und bekommt diesen als Punkte gutgeschrieben.
- Wer am Ende die meisten Punkte hat, gewinnt das Spiel.

BEISPIEL

Das 1 · 1-Würfelspiel
Jutta würfelt eine 5 und eine 7. Sie soll die Aufgabe 5 · 7 berechnen. Ihr fällt sofort ein, dass es insgesamt 35 sind, sie muss aber noch erklären, wie sie die Aufgabe errechnen würde, wenn sie die Lösung nicht wüsste. Jutta sagt: „Ich weiß ja was 10 · 7 ist. Das sind 70. Und dann die Hälfte: sind 35."

Justus würfelt 10 und 3. Er erklärt: „Bei 10 · 3 ist zehnmal die Drei da, das ist dasselbe wie dreimal die Zehn. Deshalb sind es insgesamt 30."

Da Jutta die größere Zahl gewürfelt hat, muss sie den Unterschied von 30 und 35 berechnen. Sie bekommt 5 Punkte gutgeschrieben.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Sie können nun Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben herleiten. Die Teilnehmer*innen wussten vielleicht schon vorher die Zehnerreihe auswendig und ihnen war bekannt, dass bei Zehnmal-Aufgaben nur eine Null angehängt werden muss. Nun wissen sie aber auch, warum das so ist.
- Den Teilnehmer*innen ist nun bekannt, dass bei der Verzehnfachung einer Zahl (10 · ____) diese Zahl dann zehnmal vorhanden ist (____ · 10). Es werden Zehner gebildet. Und zwar genau so viele Zehner wie die Zahl, die verzehnfacht werden soll. Das ist die Begründung dafür, dass einfach nur Nullen angehängt werden müssen.
- Des Weiteren wissen die Teilnehmer*innen nun, dass es sich bei Zweimal-Aufgaben um die Aufforderung handelt, die Ausgangsmenge zu verdoppeln. Wenn eine Menge zweimal vorhanden ist, ist es genauso, wie wenn zu dieser Menge die gleiche Menge addiert wird (____ + ____).
- Außerdem können die Teilnehmer*innen von Zehnmal-Aufgaben alle Fünfmal-Aufgaben ableiten. Dazu wird die Gesamtmenge, die durch die Verzehnfachung entstanden ist, halbiert. Denn wenn eine Zahl zehnmal vorhanden ist, ist sie fünfmal und noch einmal fünfmal vorhanden.

13.2.6 Ableitungsstrategien erkunden und anwenden

Didaktische Ziele
- Zusammenhänge zwischen einzelnen Malaufgaben systematisch erkunden
- Ableitungen zum Berechnen von Einmaleins-Aufgaben benutzen

EXPLORATION

Sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins (und darüber hinaus) können aus den bereits erarbeiteten Kernaufgaben Zehnmal, Zweimal und Fünfmal abgeleitet, das heißt errechnet werden. Die dafür wesentlichen Strategien beruhen auf den Prinzipien des Verdoppelns oder der Nachbaraufgaben.

Die möglichen Ableitungswege aller weiteren Aufgaben im Überblick:

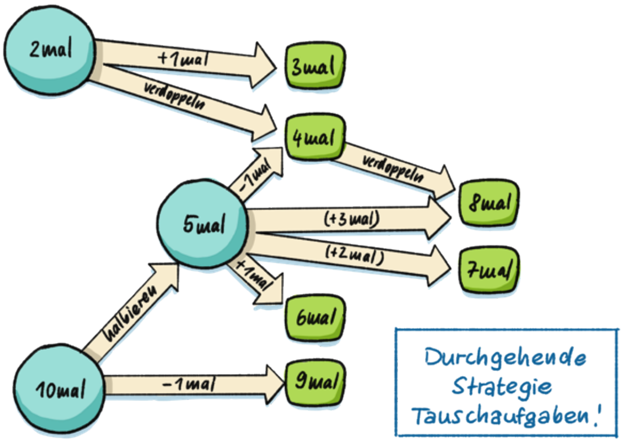


Abbildung 13.2-9

Dreimal lässt sich von Zweimal ausgehend über den Gedanken „dieselbe Zahl noch einmal dazu“ erarbeiten:
$3 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 6$, also $12 + 6 = 18$, usw.

Viermal kann auch von Zweimal ausgehend über den Gedanken der Verdoppelung erarbeitet werden:
$4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6$, also $12 + 12 = 24$, usw.

Oder von Fünfmal ausgehend über den Gedanken „dieselbe Zahl einmal weg“:
$5 \cdot 6 = 30$, $4 \cdot 6$ ist also $30 - 6 = 24$.

Für Sechsmal bietet sich „Fünfmal und noch einmal dazu“ an:
$5 \cdot 8 = 40$, daher $6 \cdot 8 = 40 + 8 = 48$.

Neunmal ist über Zehnmal minus Einmal unschwer zu errechnen:
$9 \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 7 = 63$

Mit den bislang genannten Strategien lassen sich – unter Berücksichtigung des Prinzips der Tauschaufgabe ($9 \cdot 7 = 7 \cdot 9$ etc.) – sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins einfach ableiten, mit Ausnahme von zwei Malaufgaben, nämlich $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$ sowie $8 \cdot 8$.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Wie Ableitungsstrategien erarbeitet werden können, wird im Folgenden am Beispiel der Neunmal-Aufgaben kurz dargestellt. Für die Erarbeitung der weiteren Strategien gelten analoge Empfehlungen. An dieser Stelle geht es in erster Linie darum, Verständnis für den operativen Zusammenhang zwischen Kernaufgabe und zu ermittelnder Aufgabe handelnd zu erarbeiten, die Ergebnisse der Aufgaben stehen dabei nicht im Vordergrund.

Für die aktive Erkundung der Zusammenhänge eignen sich einerseits Steckwürfel, andererseits das Hunderterfeld. Je nach Gruppe kann entschieden werden, ob zuerst der etwas zeitaufwändigere Weg der Mengenhandlungen mit Steckwürfeln oder gleich der direkte Einstieg mit dem Hunderterfeld gewählt wird.

Erster möglicher Weg: Die Kursteilnehmer*innen werden aufgefordert, z. B. $10 \cdot 4$ mit Steckwürfeln zu legen. Man kann zum Einsparen von Zeit auch Steckwürfeltürme zu je 4 Würfeln vorbereiten. Es sollte nach Bearbeitung der vorhergehenden Kapitel allen Teilnehmer*innen klar sein, dass für $10 \cdot 4$ zehn Türme mit je vier Würfeln benötigt werden. Dann die Frage:

„Was müssen Sie tun, damit daraus $9 \cdot 4$ wird?“

Die Lösung: „Ich muss einen Viererturm wegnehmen!“ Da es an dieser Stelle darum geht, Verständnis für den Zusammenhang von "zehnmal" und „neunmal“ zu erarbeiten, ist es nicht notwendig, sofort mit der Ergebnisermittlung weiterzumachen. Vielmehr lohnt es, denselben operativen Zusammenhang (wieder ohne auszurechnen) auch an anderen Aufgabenpaaren zu erforschen, also etwa:

„Legen Sie 10 · 6!“

„Machen Sie daraus 9 · 6!“

„Legen Sie 10 · 8!“

„Wie wird daraus 9 · 8?“ und so weiter.

Erst in weiterer Folge sollte die Aufmerksamkeit auf das Ergebnis und dessen rechnerische Ermittlung gelenkt werden. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Zehnmal-Aufgaben als Kernaufgaben automatisiert sind und dass das Subtrahieren von einer Zehnerzahl („Entbündeln“) keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Wenn auf der Handlungsebene für z. B. 9 · 4 zunächst 10 · 4 gebildet und dann vier weggenommen wurden, soll überlegt werden, wie man ausrechnen könnte, wie viel 9 · 4 ist. Viele Kursteilnehmer*innen werden ohne weitere vermittelnden Fragen und Denkanstöße selbst darauf kommen, dass dem Wegnehmen von einem Vierer-Turm die Rechnung 40 – 4 entspricht. Wenn dabei Schwierigkeiten auffallen, bieten Strategiekonferenzen oder Gruppengespräche weitere Lernchancen. Durch Fragen und Denkanstöße kann und soll die Kursleitung Hilfe beim Selbst-Entdecken bieten.

Eine weitere Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen Kernaufgaben und neuen, noch nicht automatisierten, also subjektiv meist als schwieriger eingeschätzten Malaufgaben zu erkunden, ist das Hunderterfeld oder 100-Punkte-Feld, das schon für die Erarbeitung der Zehnmal und Fünfmalaufgaben benutzt wurde. Die folierten Punktefelder (**Kopiervorlage 7**) bieten sich auch hier wieder für ein rasches Darstellen von Multiplikationen an.

Dafür braucht es zusätzlich einen Abdeckwinkel aus Papier oder Karton in passender Größe, der es erlaubt, jede Aufgabe des kleinen Einmaleins durch einfaches Anlegen des Winkels darzustellen und durch Verschieben des Winkels in eine andere Aufgabe zu verwandeln.

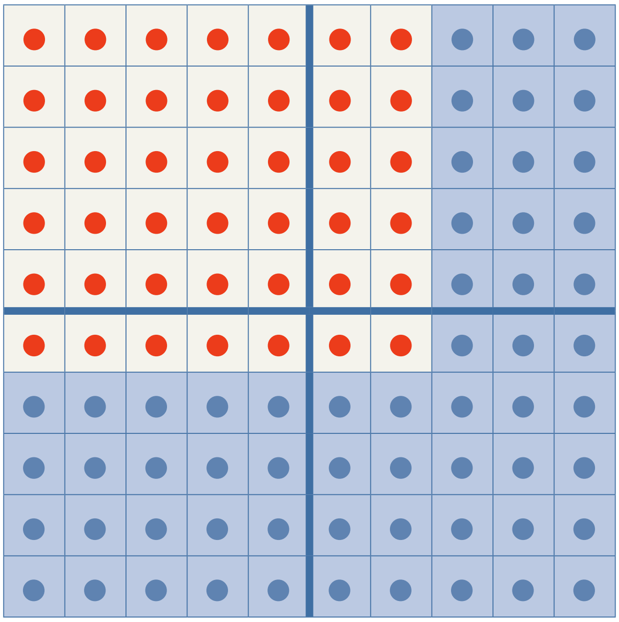


Abbildung 13.2-10 Darstellung der Aufgabe 7 · 6 (oder auch 6 · 7) am Hunderterfeld mit Abdeckwinkel

Die Fünfer-Gliederung der Punkte am 100-Punkte-Feld erlaubt nicht-zählendes Erkennen der dargestellten Anzahl von Reihen und Spalten, bzw. nicht-zählendes Anlegen des Abdeckwinkels auf eine beliebige Anzahl von Reihen und Spalten.

Das Arbeiten am Operationsverständnis und am Verstehen operativer Zusammenhänge wird durch dieses Arbeitsmittel wesentlich erleichtert: Kursteilnehmer*innen erhalten den Auftrag, bestimmte Malaufgaben auf ihren 100-Punkte-Feldern mit dem Abdeckwinkel darzustellen. Umgekehrt können die Kursteilnehmer*innen aufgefordert werden, zu vorgelegten Darstellungen die zugehörigen Malaufgaben zu nennen. Die eingangs skizzierten Zusammenhänge zwischen Malaufgaben können durch einfaches Verschieben des Abdeckwinkels entdeckt werden. Um aus 5 · 7 die benachbarte Aufgabe 6 · 7 zu machen, verschiebt man den Abdeckwinkel um eine Reihe und eine weitere Reihe von 7 Punkten kommt dazu. Wichtig an dieser Stelle ist das Versprachlichen der Handlungen zur Absicherung des Verständnisses der Zusammenhänge und somit der möglichen Ableitungswege.

Wenn eine Systematik in der Erarbeitung der Ableitungsstrategien angestrebt wird, können zuerst Aufgaben des Typs „Kernaufgabe und noch einmal dazu“ gewählt werden, das wären die Dreimal-Aufgaben (Zweimal und noch einmal dazu) und die Sechsmal-Aufgaben (Fünfmal und noch einmal dazu). Im nächsten Schritt kann man Aufgaben des Typs „Kernaufgabe und einmal weg" machen, das wären die Neunmal-Aufgaben (Zehnmal und einmal weg) und die Viermal-Aufgaben (Fünfmal und einmal weg). Diese Reihenfolge im Vorgehen ist nicht zwingend, sie erleichtert aber die Einsicht, dass bestimmte Zusammenhänge sogar öfter anzuwenden sind.

Bei der Besprechung von Strategien für Viermal-Aufgaben kommt hoffentlich bei den Kursteilnehmer*innen selbst die neue Idee auf, Zweimal-Aufgaben zu verdoppeln; falls nicht, kann die Kursleitung das anregen, am Beispiel $4 \cdot 7$ bedeutet das etwa, dass erst $2 \cdot 7$ gerechnet wird und das Ergebnis dann verdoppelt wird, also $2 \cdot (2 \cdot 7)$. Die Wahl der als leichter empfundenen Strategie kann dann in der Phase der Routinisierung jeder für sich treffen.

Im Praxishandbuch von Michael Gaidoschik „Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten" 2014, Friedrich Verlag, wird die „ganzheitliche" Erarbeitung des kleinen Einmaleins ausführlich beschrieben. Gerade Menschen, die mit dem traditionellen Reihenlernen gescheitert sind und oft dauerhaft scheitern, haben mit diesem ganzheitlichen Zugang gute Grundlagen, das Einmaleins zu verstehen und langfristig abzuspeichern. Das Buch bietet außerdem Unterrichtsmaterialien und Kopiervorlagen für eine Lernkartei, die auch zum Download zur Verfügung stehen.

13.2.7 Ableitungsstrategien erkunden und anwenden

Didaktisches Ziel
sämtliche Einmaleins-Aufgaben spielerisch und individualisiert automatisieren

EXPLORATION

Erst wenn die Kernaufgaben automatisiert sind und die Zusammenhänge zu anderen Aufgaben beschrieben und rechnerisch ermittelt werden können, ist in weiterer Folge das Automatisieren des gesamten Einmaleins sinnvoll. Ein zu rasches Voranschreiten kann hier kontraproduktiv sein, weil der Vorteil von Ableitungsstrategien nicht augenscheinlich wird, wenn inhaltliche Voraussetzungen nicht abgesichert sind.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Das unter 13.2.5 bereits beschriebene Würfelspiel eignet sich auch für die Übung und Festigung der restlichen Malaufgaben.

Die Teilnehmer*innen bilden wieder Zweiergruppen. Jede Gruppe erhält diesmal zwei Dekaeder-Würfel[8] mit den Zahlen 0 bis 9. Nun werden abwechselnd Aufgaben gewürfelt und berechnet. Entweder ist das Ergebnis bereits spontan abrufbar, oder es wird über eine Ableitungsstrategie ermittelt. Im zweiten Fall sollte der*dem Spielpartner*in nicht nur die Lösung genannt werden, sondern auch, wie diese Lösung ermittelt wurde.

Die Ergebniszahl der gewürfelten Aufgabe wird notiert. Nun würfelt die andere Person auch eine Aufgabe und löst diese. Die Person mit der höheren Ergebniszahl erhält pro Runde einen Punkt, je nach angestrebter Übungsdauer kann man als Gewinner*in festlegen, wer zuerst 10 oder auch 20 Punkte erzielt hat.

Zum gezielten und vor allem individualisierten Automatisieren hat sich die Verwendung von Lernkärtchen in einer Lernkartei bewährt. Sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins finden sich auf der **Kopiervorlage 8.** Diese kann bei Bedarf für jede*n Kursteilnehmer*in kopiert und in Kärtchen-Format geschnitten werden.

Die Kartei wird idealerweise nicht sofort mit allen Malaufgaben gefüllt, sondern nach und nach und je nach individuellem Lernfortschritt zu einer vollständigen Einmaleins-Datei ausgebaut. Wie stets bei Verwendung einer Lernkartei, sollten jene Aufgaben-Kärtchen, die bereits spontan abgerufen werden können, bei jeder erfolgreichen Wiederholung in der Kartei um ein Fach weiter nach hinten gesteckt werden. Schon früh werden sich die Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben im Fach „Spontan gewusst" finden. Auch die Einmal- und Nullmal-Aufgaben, die hier nicht extra thematisiert wurden, sind in der Regel rasch automatisiert. Noch nicht spontan gewusste Kärtchen bleiben aber in ihrem Fach und sollten häufiger wiederholt werden.

Entscheidend ist dabei, dass auch beim automatisierenden Üben die operativen Zusammenhänge genützt werden sollten, die zuvor als Ableitungsstrategie erarbeitet wurden. Zunächst ging es darum, mit Hilfe dieser Strategien das ökonomische Ausrechnen noch nicht automatisierter Aufgaben zu ermöglichen. Beim automatisierenden Üben soll nun versucht werden, durch wiederholtes Abrufen dieser Strategien feste Gedächtnis-Assoziationen zwischen einer bereits gemerkten Aufgabe (der Kernaufgabe) und einer noch zu merkenden Aufgabe zu knüpfen. Solche Assoziationen erleichtern und beschleunigen das Speichern der noch zu merkenden Aufgabe im Langzeitgedächtnis: Zusammenhängendes wird leichter gemerkt als isolierte Einzelfakten.

Konkret heißt das: Die Kursteilnehmer*innen bekommen z. B. alle „Neunmal-Aufgaben" (aber zunächst *nur* diese) auf Aufgabenkärtchen als *ein* Päckchen von zusammenhängenden Aufgaben vorgelegt mit dem Auftrag, diese Aufgaben regelmäßig zu trainieren. Wenn nun eine Aufgabe noch nicht aus dem Gedächtnis abgerufen werden kann, dann soll sie auf dem erarbeiteten Weg aus der zugehörigen „Zehnmal-Aufgabe" abgeleitet werden. Die Zusammenstellung aller „Neunmal-Aufgaben" zu einem Päckchen erleichtert dieses Ableiten insofern, als durch die oftmalige Wiederholung desselben Ableitungsweges die Chance erhöht wird, dass sich dieser Ableitungsweg einschleift, dass er also ohne große Denkanstrengung abgerufen werden kann.

Diese Form des Trainings lässt sich sehr gut in Partnerarbeit durchführen. Da es auch beim Arbeiten mit der Lernkartei nicht um reines Auswendiglernen geht, sollte das richtige Ergebnis nicht auf der Rückseite des Kärtchens notiert werden, denn so wird die Versuchung zu groß, das Kärtchen einfach umzudrehen, ohne zuvor über den Ableitungszusammenhang nachgedacht zu haben. In der Tandemarbeit kann die zweite Person die Kontrollfunktion übernehmen: Übungspartner*in 1 denkt über die Lösung und dafür eventuell auch über Ableitungsstrategien nach. Die genannte Lösung wird vom Übungspartner*in 2 dann bestätigt oder korrigiert.

Wenn Kursteilnehmer*innen nur vereinzelte Lücken im kleinen Einmaleins haben, kann man genau jene Aufgaben, die Schwierigkeiten bereiten, auf leere Karteikärtchen schreiben (ohne Ergebnis) und diese dann zum Wiederholen von Ableitungswegen und damit zum Abspeichern der Ergebnisse mitgeben.

Sollten sich in der Gruppe Kursteilnehmer*innen befinden, die das kleine Einmaleins bereits gut automatisiert haben, bietet eine Übertragung der besprochenen Ableitungsstrategien auf das große Einmaleins eine gute Möglichkeit zum Differenzieren. Als Anstoß kann die Frage genügen, wie man 13 · 5 im Kopf berechnen könnte. Wenn keine tauglichen Lösungsvorschläge kommen, kann die Kursleitung den Ableitungsweg aufzeigen: zuerst 10 · 5 und dann noch 3 · 5 dazu, also 50 + 15 = 65. Da das erste Teilergebnis immer eine reine Zehnerzahl ist, stellt das Addieren der beiden Teilergebnisse kaum rechnerische Schwierigkeiten dar. Das Thematisieren des großen Einmaleins ist für leistungsstärkere Gruppen unter alltagspraktischen Gesichtspunkten sicher lohnend.

ENDNOTEN

1 Wenn der*die Teilnehmer*in z. B. immer den Weg 5 · 8 + 3 · 8 wählt, könnte eine andere Aufgabe vorgegeben werden. Mit einem umfassenden Operationsverstandnis kann man auf Nachfrage auch von 10 · 8 auf 8 · 8 schließen.

2 Die Kursleitung beachtet, dass auf diese Frage mit der Gesamt- oder den Teilmengen geantwortet werden kann. Bei der Aufgabe 4 · 3 Würfel könnten die Teilnehmer*innen sagen, man hätte 12 Würfel gebracht. Oder sie schauen auf die Teilhandlungen und äußern, die Lehrkraft hätte immer drei gebracht. Die Kursleitung muss die Unterschiede mit den Teilnehmer*innen herausarbeiten: Habe ich 12 oder 3 Würfel gebracht? Warum kann beides richtig sein?

3 Die Kursleitung beachtet, dass es keineswegs sachlich zwingend ist, dass der zweite Faktor die vervielfachte Zahl angibt und der erste Faktor angibt, wie oft vervielfacht wird. Es handelt sich lediglich um eine kulturelle Konvention. Wir wissen, dass es Kulturkreise gibt, in denen die Konvention andersherum ist.

4 Die aktuelle Version von Kapitel 13 behandelt Ableitungsstrategien für das gesamte Einmaleins nur knapp. Es liegen ausführliche Unterrichtskonzepte zur Herleitung und Automatisation von Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben vor, sowie eine kurzgefasste Beschreibung der weiteren Vorgehensweise.

5 Ein Hunderterfeld befindet sich in der Kopiervorlage 7. Dieses wird so laminiert, dass mit einem Folienstift immer wieder neue Mal-Aufgaben eingezeichnet werden können.

6 Reihe wurde hier bewusst kursiv gesetzt, da in diesem Kurs eben keine Reihen auswendig gelernt werden sollen, sondern Kompetenzen zum Ab- und Herleiten der Aufgaben des Einmaleins erworben werden. Gerade die „Fünferreihe" wird oft auswendig gewusst. Und trotzdem sollen die Teilnehmer*innen des Kurses lernen, Fünfmal-Aufgaben herzuleiten.

7 Wir haben kein Kriterium, um zu entscheiden, ob diese Konstellation mit 9 · 10 oder mit 10 · 9 bezeichnet werden soll. Die Argumentation funktioniert mit beiden Sprechweisen, man muss die einmal gewählte Sprechweise aber konsequent weiter verwenden.

8 zehnflächige Würfel mit den Ziffern 0 bis 9 beschriftet

Anhang Kopiervorlagen

vhs-Lernportal
vhs.link/KDQ6HB

Kopiervorlage 1

$1 \cdot 6$	$6 \cdot 1$
$3 \cdot 5$	$5 \cdot 3$
$4 \cdot 3$	$3 \cdot 4$
$2 \cdot 4$	$4 \cdot 2$

Kopiervorlage 2

Anleitung Partnerarbeit

Person 1 nimmt eine verdeckte Karte vom Tisch. Die andere Person darf die Aufgabe auf der Karte nicht sehen. Nun spielt Person 1 die Aufgabe von der Karte vor. Steht auf der Karte zum Beispiel „2 · 6“, dann geht sie dabei 2-mal hintereinander **zum Schrank und holt jeweils 6 Stifte und legt diese geordnet auf den Tisch**. Die Mal-Aufgabe sollte auch am Ende der Handlung gut erkennbar sein.
Person 2 beobachtet genau was passiert und füllt dann die Fragen unten aus.
Am Ende kontrolliert man, ob die Mal-Aufgaben zusammenpassen.
Dann tauscht man die Rollen.
Jede Person sollte zwei Mal-Aufgaben vorspielen und zwei Mal-Aufgaben beobachten.

1. Aufgabe

Wie oft geht die andere Person etwas holen? (entspricht dem 1. Faktor)

Wie viele Gegenstände holt sie jedes Mal? (entspricht dem 2. Faktor)

Welche Mal-Aufgabe passt zur vorgespielten Situation?

Welche Plus-Aufgabe passt zur vorgespielten Situation?

Wie viele Gegenstände holt Ihr*e Partner*in insgesamt?

---

2. Aufgabe

Wie oft holt Ihr*e Partner*in etwas? (entspricht dem 1. Faktor)

Wie viele Gegenstände holt die andere Person jedes Mal? (entspricht dem 2. Faktor)

Welche Mal-Aufgabe passt zur vorgespielten Situation?

Welche Plus-Aufgabe passt zur vorgespielten Situation?

Wie viele Gegenstände holt Ihr*e Partner*in insgesamt?

Kopiervorlage 3

Anleitung Partnerarbeit

Person 1 nimmt eine verdeckte Karte vom Tisch. Die andere Person darf die Aufgabe auf der Karte nicht sehen. Nun legt Person 1 die Mal-Aufgabe von der Karte mit **Steckwürfeln** gut geordnet auf den Tisch.
Person 2 beobachtet genau was dann am Tisch liegt und füllt die Fragen unten aus.
Am Ende kontrolliert man, ob die Mal-Aufgaben zusammenpassen.
Dann tauscht man die Rollen.
Jede Person sollte zwei Mal-Aufgaben legen und zwei Mal-Aufgaben beobachten.

Aufgabe

Welche Mal-Aufgabe passt zu den gelegten Steckwürfeln?

Wo/Wie sieht man dabei den ersten Faktor?

Wo/Wie sieht man dabei den zweiten Faktor?

Welche Plus-Aufgabe passt zu den gelegten Steckwürfeln?

Wie viele Steckwürfel liegen insgesamt da?

Kopiervorlage 4

$3 \cdot 6 = 6 \cdot 3$	
$5 \cdot 8 = 8 \cdot 5$	
$4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$	
$6 \cdot 6$	

Kopiervorlage 5

Anleitung Partnerarbeit

Person 1 nimmt eine verdeckte Karte vom Tisch. Die andere Person darf die Aufgabe auf der Karte nicht sehen. Nun legt Person 1 die Mal-Aufgabe von der Karte mit **Plättchen** gut geordnet auf den Tisch.
Person 2 beobachtet genau, was dann auf dem Tisch liegt und füllt die Fragen unten aus.
Am Ende kontrolliert man, ob die Mal-Aufgaben zusammenpassen.
Dann tauscht man die Rollen.
Jede Person sollte zwei Mal-Aufgaben legen und zwei Mal-Aufgaben beobachten.

1. Aufgabe

Welche Mal-Aufgabe(n) passt/passen zu den gelegten Blättchen?

Wo/Wie sieht man dabei den ersten Faktor?

Wo/Wie sieht man dabei den zweiten Faktor?

Welche Plus-Aufgabe(n) passt/passen zu den gelegten Blättchen?

Wie viele Blättchen liegen insgesamt da?

---

2. Aufgabe

Welche Mal-Aufgabe(n) passt/passen zu den gelegten Blättchen?

Wo/Wie sieht man dabei den ersten Faktor?

Wo/Wie sieht man dabei den zweiten Faktor?

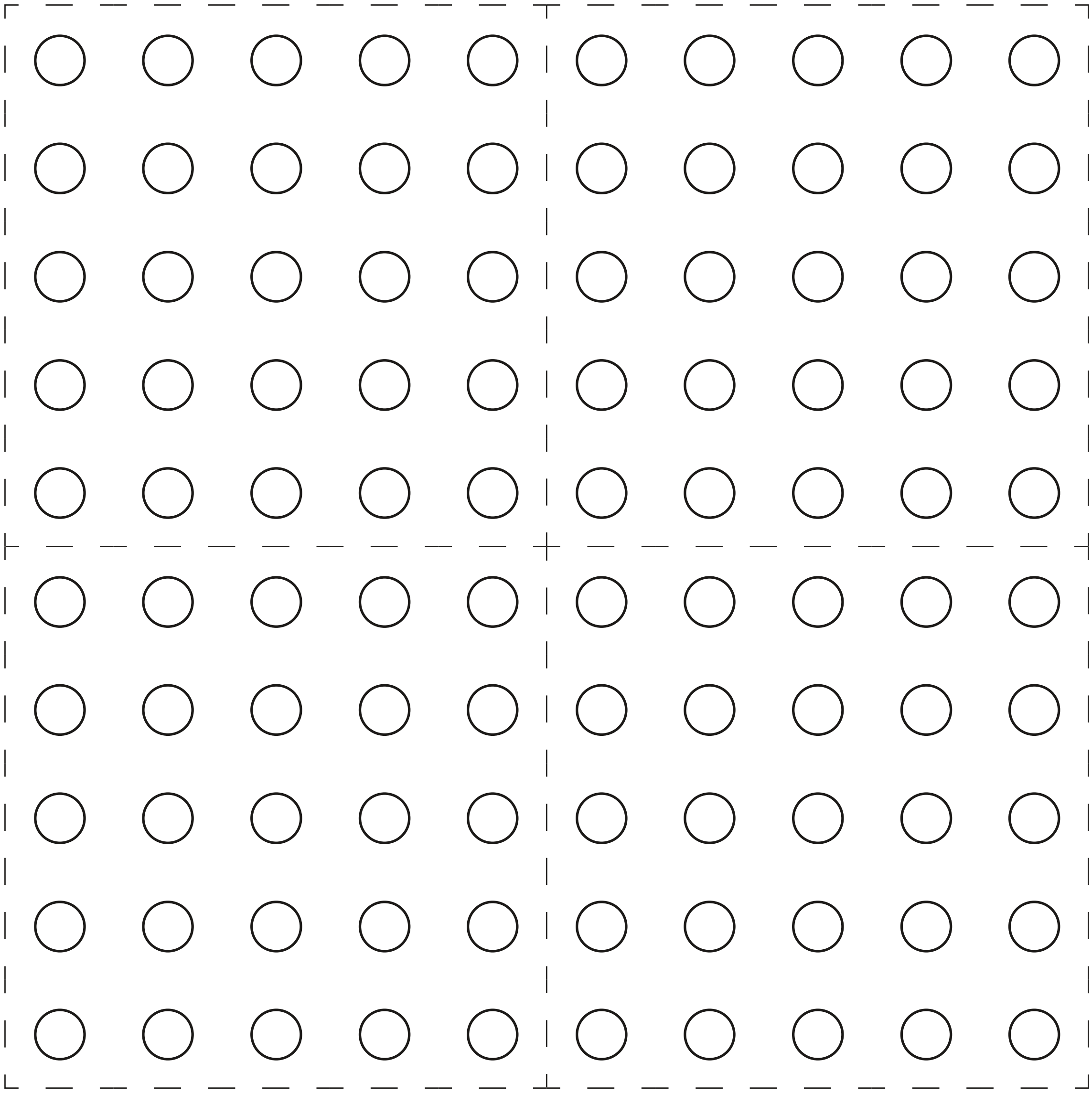
Welche Plus-Aufgabe(n) passt/passen zu den gelegten Blättchen?

Wie viele Blättchen liegen insgesamt da?

Kopiervorlage 6

___ · ___ = ___ · ___	___ · ___ = ___ · ___
___ · ___ = ___ · ___	___ · ___ = ___ · ___
___ · ___ = ___ · ___	___ · ___ = ___ · ___
___ · ___ = ___ · ___	___ · ___ = ___ · ___

Kopiervorlage 7



vhs-Lernportal
vhs.link/KDQ6HB

Kopiervorlage 8

$10 \cdot 10$	$0 \cdot 1$
$0 \cdot 2$	$0 \cdot 3$
$0 \cdot 4$	$0 \cdot 5$
$0 \cdot 6$	$0 \cdot 7$

$0 \cdot 8$	$0 \cdot 9$
$0 \cdot 10$	$1 \cdot 0$
$1 \cdot 1$	$1 \cdot 2$
$1 \cdot 3$	$1 \cdot 4$

$1 \cdot 5$	$1 \cdot 6$
$1 \cdot 7$	$1 \cdot 8$
$1 \cdot 9$	$1 \cdot 10$
$2 \cdot 0$	$2 \cdot 1$

$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$
$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5$
$2 \cdot 6$	$2 \cdot 7$
$2 \cdot 8$	$2 \cdot 9$

$2 \cdot 10$	$3 \cdot 0$
$3 \cdot 1$	$3 \cdot 2$
$3 \cdot 3$	$3 \cdot 4$
$3 \cdot 5$	$3 \cdot 6$

$3 \cdot 7$	$3 \cdot 8$
$3 \cdot 9$	$3 \cdot 10$
$4 \cdot 0$	$4 \cdot 1$
$4 \cdot 2$	$4 \cdot 3$

$4 \cdot 4$	$4 \cdot 5$
$4 \cdot 6$	$4 \cdot 7$
$4 \cdot 8$	$4 \cdot 9$
$4 \cdot 10$	$5 \cdot 0$

$5 \cdot 1$	$5 \cdot 2$
$5 \cdot 3$	$5 \cdot 4$
$5 \cdot 5$	$5 \cdot 6$
$5 \cdot 7$	$5 \cdot 8$

$5 \cdot 9$	$5 \cdot 10$
$6 \cdot 0$	$6 \cdot 1$
$6 \cdot 2$	$6 \cdot 3$
$6 \cdot 4$	$6 \cdot 5$

$6 \cdot 6$	$6 \cdot 7$
$6 \cdot 8$	$6 \cdot 9$
$6 \cdot 10$	$7 \cdot 0$
$7 \cdot 1$	$7 \cdot 2$

$7 \cdot 3$	$7 \cdot 4$
$7 \cdot 5$	$7 \cdot 6$
$7 \cdot 7$	$7 \cdot 8$
$7 \cdot 9$	$7 \cdot 10$

$8 \cdot 0$	$8 \cdot 1$
$8 \cdot 2$	$8 \cdot 3$
$8 \cdot 4$	$8 \cdot 5$
$8 \cdot 6$	$8 \cdot 7$

$8 \cdot 8$	$8 \cdot 9$
$8 \cdot 10$	$9 \cdot 0$
$9 \cdot 1$	$9 \cdot 2$
$9 \cdot 3$	$9 \cdot 4$

$9 \cdot 5$	$9 \cdot 6$
$9 \cdot 7$	$9 \cdot 8$
$9 \cdot 9$	$9 \cdot 10$
$10 \cdot 0$	$10 \cdot 1$

$10 \cdot 2$	$10 \cdot 3$
$10 \cdot 4$	$10 \cdot 5$
$10 \cdot 6$	$10 \cdot 7$
$10 \cdot 8$	$10 \cdot 9$

Kopiervorlage 9

Welche Mal-Aufgabe ist in den Kästen dargestellt?

Welche Mal-Aufgabe wurde im linken Kasten dargestellt?

Welche Mal-Aufgabe sehen Sie im rechten Kasten?

Was fällt auf, wenn Sie den linken und den rechten Kasten miteinander vergleichen?

Wie kann Ihnen die Aufgabe $10 \cdot$ ____ helfen, die Aufgabe $5 \cdot$ ____ zu lösen?

Werten Sie die Ergebnisse zusammen mit der Kursleitung aus!

St2

vhs-Lernportal
vhs.link/KDQ6HB

Kopiervorlage 10

Welche Mal-Aufgabe wird im linken Kasten abgebildet?

Wenn Sie die Zeichen verdoppeln würden, welche Mal-Aufgabe wäre dann oben abgebildet?

Wenn Sie bereits wissen, dass 10 · ____ Zeichen insgesamt ______ Zeichen sind: Wie können Sie dann ausrechnen, wie viel 5 · ____ Zeichen sind?

Was haben die Aufgaben 10 · ____ und 5 · ____ miteinander zu tun?

Werten Sie die Ergebnisse zusammen mit der Kursleitung aus!

Impressum

Herausgeber:

Projekt „Praxistransfer der DVV-Rahmencurricula Lesen, Schreiben und Rechnen“
Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Königswinterer Str. 552b
53227 Bonn
info@dvv-vhs.de
www.volkshochschule.de

Verantwortlich: Julia von Westerholt

Autor*innen:

Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer
Dr. Alina Guther
Dr. Dagmar Grütte
Kora Deweis-Weidlinger

Projektteam:
Dr. Angela Rustemeyer, Projektleiterin

Annegret Ernst, Projektreferentin
Gisela Lorenz, Projektreferentin
Hanna Riedel, Projektreferentin
Sandra Krampe, Sachbearbeiterin
Sarah Huesmann, Sachbearbeiterin
Nina Diekmannshemke, Werkstudentin

Lektorat: Marisa Janson
Layout/Satz: zweiband.media, Berlin
Druck: Druckerei Flock, Köln

2., überarbeitete Auflage 2021

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.de abrufbar.

ISBN 978-3-942755-70-2

vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

Einfach gut unterrichten.
Die DVV-Rahmencurricula

materialsuche.grundbildung.de

2.000 Seiten Unterrichtsmaterial für die Grundbildung.
Vielfach filterbar – probieren Sie es aus!

AlphaDekade 2016 – 2026

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

AlphaDekade
2016 – 2026

Das diesem Heft zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen W143400 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt liegt beim Herausgeber.

Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Königswinterer Str. 552b
53227 Bonn

info@dvv-vhs.de
www.volkshochschule.de

Projekt „Praxistransfer der DVV-Rahmencurricula Lesen, Schreiben und Rechnen“

www.grundbildung.de